DYNAMISCHE OPTIMIERUNG UNTER UNSICHERHEIT IN EINEM SEMI-MARKOFF-MODELL MIT ABZÄHLBAREM ZUSTANDSRAUM

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von
MICHAEL KOLONKO
aus
HALLE/SAALE

BONN 1980

DYNAMISCHE OPTIMIERUNG UNTER UNSICHERHEIT IN EINEM SEMI-MARKOFF-MODELL MIT ABZÄHLBAREM ZUSTANDSRAUM

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

MICHAEL KOLONKO

aus

HALLE/SAALE

BONN 1980

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Manfred Schäl
2. Gutachter: Prof. Dr. Walter Vogel

Tag der mündlichen Prüfung : 3.4.1980

UNIV. LEIDEN BIBL.

Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Bonn

Abteilung für Wahrscheinlichkeitstheorie und
Mathematische Statistik

Direktor: Prof. Dr. Walter Vogel

Druck: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Meinen Eltern

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546505_0033

Zu großem Dank bin ich Herrn Professor Dr. M. Schäl verpflichtet, der mir die Anregung zu dieser Arbeit gab und durch die fortwährende Betreuung und viele Vorschläge zu ihrem Gelingen beitrug.

Mein Dank gilt auch Herrn Professor Dr. W. Vogel für die Möglichkeit, diese Arbeit an der Abteilung für Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 72 der Deutschen Forschungsgemeinschaft zu verfassen.

Danken möchte ich auch Fräulein Thiedemann für die sorgfältige Ausführung der Schreibarbeit.

Inhaltsübersicht

	Seite
Einleitung	1
1. Das Semi-Markoff'sche Entscheidungsmodell unter Unsicherheit	11
A. Definition des Modells	11
B. Zulässige Pläne	12
C. Der Wahrscheinlichkeitsraum und die Prozesse X_m, A_m, Z_m	14
D. Das Durchschnittsgewinnkriterium	17
E. Voraussetzungen	20
2. Hilfssätze	24
3. Die Vollständigkeit von Teilmengen von Plänen bei festem θ	32
4. Erwartete Rückkehrzeiten und Ljapunoff-Bedingungen	35
5. Der eingebettete Prozeß $\bar{X}_m$	40
6. Ergodensätze unter Ljapunoff-Bedingungen	54
7. Das asymptotische Verhalten der Beschränkungsfunktion	68
8. Die Optimalitätsgleichung und die Existenz θ-optimaler, stationärer Pläne bei festem θ	75
9. Die Konstruktion eines optimalen Planes	86
10. Ergänzungen	102
A. Verallgemeinerte Ziel- und Gewinnfunktionen	102
B. ε-optimale Pläne	110
C. Das Modell mit $H = \{i^*\}$	114
D. Das Modell mit endlichem Zustandsraum	117
E. Exzessive Funktionen	119
11. Ein Beispiel aus der Warteschlangentheorie	122
A. Das Warteschlangenmodell	123
B. Die Stetigkeits- und Ljapunoff-Bedingungen	128
C. Steuerbare Ankunftsrate - unbekannte Bedienungszeitverteilung	135
D. Steuerbare Bedienungszeitverteilung - unbekannte Ankunftsrate	138
12. Das Schätzproblem im Semi-Markoff'schen Entscheidungsmodell	143
A. Minimumkontrast-Funktionen	145
B. Die starke Konsistenz der Minimumkontrast-Schätzer	152
C. Zusammenfassung und Beispiele	162
Literaturverzeichnis	170

Einleitung

Dynamische Optimierung unter Unsicherheit

In der (Markoffschen) Dynamischen Optimierung betrachtet man mathematische Modelle für Sachverhalte der realen Welt, die sich etwa so skizzieren lassen:

Ein System, z.B. ökonomischer oder technischer Art, wird über einen gewissen Zeitraum hin beobachtet. Zu bestimmten (häufig äquidistanten) (Entscheidungs-) Zeitpunkten lassen sich alle im betrachteten Zusammenhang relevanten Daten des Systems zusammenfassen zu einem sogenannten Zustand des Systems. Gleichzeitig besteht zu diesen Entscheidungszeitpunkten die Möglichkeit, das weitere Verhalten des Systems durch eine Entscheidung (Aktion, Kontrolle) so zu beeinflussen, daß durch den vorliegenden Zustand und die ergriffene Aktion der nächste Zustand des Systems in gewissem Sinne bestimmt ist. Das Verhalten des Systems, also die ganze Abfolge von Zuständen und Aktionen soll einer Bewertung unterliegen, die etwa die Wirksamkeit der ergriffenen Aktionen und den Aufwand dafür (z.B. Kosten) mißt.
Gesucht ist eine Entscheidungsvorschrift (Plan), die den mit ihr erzielten Wert des Systemverhaltens in einem gegebenen Rahmen optimiert (im folgenden o.E.: maximiert).

Dazu soll das folgende mathematische Entscheidungsmodell betrachtet werden: es bezeichne I die Menge der Zustände, und A die Aktionenmenge, weiter sei eine Funktion r(i,a) gegeben, die in Abhängigkeit vom Zustand i und der Aktion a den Gewinn auf einer Stufe (zwischen zwei Entscheidungszeitpunkten) beschreibt und auf der die "globale" Bewertung des Systemverhaltens bzw. der Pläne beruht.

Die mathematische Wiedergabe der "Bewegung" des Systems, d.h. genauer der Abhängigkeit eines Zustandes von dem vorangegangenen Zustand und der vorangegangenen Aktion hängt von den näheren Umständen der zu beschreibenden Situation ab:

Sind alle Kräfte, die die Bewegung des Systems beeinflussen, bekannt, und können ihre Größen gemessen und zu einem Zustand zusammengefaßt werden, so ist damit durch Angabe eines Zustandes und einer Aktion der nächste Zustand

determiniert. Als mathematische Beschreibung dieses Zusammenhangs wählt man zweckmäßig eine Funktion $I \times A \to I$. Es handelt sich dann um ein Modell der Deterministischen Dynamischen Optimierung.

In vielen Fällen ist aber die vollständige Erfassung dieser Abhängigkeiten aus prinzipiellen, technischen oder anderen Gründen nicht möglich. Es ist dann naheliegend, die funktionale Abhängigkeit in dem Modell durch eine Übergangswahrscheinlichkeit (ÜW) q zu ersetzen; $q(\cdot|i,a)$ gibt in Abhängigkeit vom Zustand i und Aktion a die Verteilung für den nächsten Zustand an. Die Anwendung dieses Modells setzt voraus, daß die Ungewißheit über den nächsten Zustand bei Kenntnis von i und a in ihrer statistischen Gesetzmäßigkeit bekannt ist und in dem Modell hinreichend genau durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (W.-Verteilung) beschrieben werden kann. Das wird z.B. dann der Fall sein, wenn vor Beginn des Optimierungsvorgangs genügend Beobachtungsmaterial über die Bewegung des Systems vorliegt. Modelle dieser Art werden in der (stochastischen) Dynamischen Optimierung untersucht.

Die (stochastische) Dynamische Optimierung unter Unsicherheit geht demgegenüber einen Schritt weiter: außer der Unsicherheit über den nächsten Zustand wird auch eine Unsicherheit über die zugrundeliegende statistische Gesetzmäßigkeit zugelassen. Dazu betrachtet man in dem mathematischen Modell nicht mehr nur eine ÜW q, sondern eine ganze Familie von ÜWs, die im folgenden stets durch $\theta \in \Theta$ parametrisiert sein soll, also $\{q_\theta | \theta \in \Theta\}$.

In diesem Modell entsteht die Frage, wie die Optimalität eines Planes definiert werden soll, da das Verhalten des Systems bzw. der unter einem Plan erzielte Wert i.a. von dem unbekannten Parameter abhängen wird.

In der Literatur wird dazu meist ein Bayes-Ansatz benutzt, besonders im Zusammenhang mit dem Kriterium des erwarteten Gesamtgewinns, so etwa in [13], [24], [11], [29]. Ein Plan ist in diesem Sinne optimal, wenn er den bzgl. einer apriori-Verteilung über Θ gemittelten erwarteten Gesamtgewinn maximiert. Das Bayes-Verfahren wird auch im Zusammenhang mit dem Durchschnittsgewinn unter Ausnutzung der Konvergenz der aposteriori-Verteilung verwendet, z.B. in [11]. Eine andere Möglichkeit das Problem auf eine reelle Zielfunktion zu reduzieren, besteht z.B. im Minimax-Verfahren (z.B. in [29]).

In der vorliegenden Arbeit wird für den Durchschnittsgewinn ein sehr viel schärferer Optimalitätsbegriff verwendet: gesucht ist ein Plan, der den (erwarteten) Durchschnittsgewinn unabhängig von dem zugrundeliegenden "wahren" Parameter maximiert, der also gleichmäßig in $\theta \in \Theta$ optimal ist.

Es wird dabei ein verallgemeinertes Semi-Markoffsches Entscheidungsmodell (SMEM) mit abzählbarem Zustandsraum zugrundegelegt. In diesem Modell wird durch einen Zustand i, eine Aktion a und einen (darauffolgenden) Zustand j die Verteilung einer weiteren Größe z bestimmt. Diese Verteilung darf auch vom unbekannten Parameter $\theta \in \Theta$ abhängen. Die Größe z soll aus zwei Komponenten bestehen, von denen die eine die Länge der Zeit zwischen zwei Entscheidungspunkten beschreibt, während die andere als Hilfsbeobachtung interpretiert wird und nur zur Gewinnung statistischer Informationen dient. Wird diese Hilfsbeobachtung (fast sicher) konstant gesetzt, so erhält man ein einfaches SMEM unter Unsicherheit (vgl. [7], dort mit "bekanntem" Bewegungsgesetz.)

Es werden drei verschiedene Zielfunktionen für die Optimierung betrachtet:

- der erwartet Durchschnittsgewinn W (genauer: der obere Limes der Quotienten aus dem erwarteten Gesamtgewinn bis zur n-ten Stufe und der Summe der erwarteten Verweilzeiten bis zu dieser Stufe),
- der Durchschnittsgewinn S (der obere Limes der Quotienten aus dem Gesamtgewinn bis zur n-ten Stufe und der Summe der Verweilzeiten bis zu dieser Stufe), und
- eine Durchschnitts-Größe R, die gewissermaßen eine Zwischenstellung einnimmt und vor allem der formalen Herleitung der Resultate für die kompliziertere Größe S dient.

R und S sind zufällige Größen, die zu maximierende Größe wird in diesem Zusammenhang mit Hilfe des ess sup (bzw. ess inf) gebildet.

Das Verfahren von Kurano und Mandl - Ergebnisse der Literatur und der vorliegenden Arbeit

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist ein Verfahren, wie es von Kurano [18] und Mandl [21] für ein Markoff'sches Entscheidungsmodell mit endlichem Zustandsraum

vorgeschlagen wurde:

Es wird vorausgesetzt, daß zu jedem Parameterwert $\theta \in \Theta$ ein stationärer Plan f_θ existiert, der durchschnittsoptimal ist (bzgl. W oder R) in dem Modell, in dem θ der "wahre", bekannte Parameter ist.
Der unbekannte Parameter wird nun auf jeder Stufe mittels einer Schätzfunktion aus allen vorliegenden Daten (Zuständen, Aktionen, Verweilzeiten) geschätzt; und es wird der zu dem Schätzwert gehörende stationäre Plan für die vorliegende Stufe als Entscheidungsregel benutzt. Auf diese Weise wird ein (instationärer) Plan $\hat{\delta}$ definiert.

Kurano [18] und Mandl [21] haben (unter geeigneten Bedingungen) gezeigt, daß

- $\hat{\delta}$ durchschnittsoptimal ist (bzgl. W oder R), falls das verwendete Schätzverfahren stark konsistent ist unter dem Plan $\hat{\delta}$, und daß
- es Schätzverfahren gibt, die unter jedem Plan stark konsistent sind.

Ziel dieser Arbeit ist es, diese Ergebnisse auf das abzählbare SMEM zu übertragen. Es werden dabei Voraussetzungen gemacht, die in den endlichen Modellen von [18] und [21] erfüllt sind, die andererseits aber schwächer sind als die Bedingungen von Georgin [9] (angewendet auf den abzählbaren Fall), der eine ähnliche Fragestellung für überabzählbaren Zustandsraum nachgeht. Dadurch kann - wie in einem Beispiel gezeigt wird - das Verfahren von Kurano und Mandl unter relativ schwachen Voraussetzungen auf ein M/G/1-Warteschlangenmodell angewendet werden.

Für das Verfahren von Kurano und Mandl muß zunächst für jeden festen, bekannten Parameter die Existenz eines optimalen, stationären Plans gesichert sein. Das geschieht in [18] und [21] durch die Voraussetzung, daß die Markoff-Kette der Zustände unter allen stationären Plänen irreduzibel und positiv rekurrent ist. In der vorliegenden Arbeit werden dazu die (stärkeren) Ergebnisse von Federgruen et al. aus [7] übernommen.

Für den Nachweis der Optimalität von $\hat{\delta}$ ist es dann entscheidend zu zeigen, daß sich die "Verbesserungen" in der Steuerung durch die Konsistenz der Schätzfunktion auswirken auf den Durchschnittsgewinn. Dazu beschreiten Kurano und Mandl unterschiedliche Wege:
Der Beweis von Kurano in [18] benutzt eine exponentielle Fehlerabschätzung der

Maximumlikelihood-Schätzung, mit der die Abweichung zwischen dem unter $\hat{\delta}$ und dem maximal (bei bekanntem θ) zu erzielenden Gewinn bis zur n-ten Stufe abgeschätzt werden kann. Diese Fehlerabschätzung setzt einen endlichen Parameterraum voraus. Mandl dagegen mißt die Abweichung zwischen $\hat{\delta}$ und dem bei bekannten Parameter optimalen Plan nicht wie Kurano mit Hilfe des Gewinns, sondern stufenweise mit Hilfe der Optimalitätsgleichung. Dadurch läßt sich die Optimalität von $\hat{\delta}$ auch für beliebige Parameterräume und beliebige, stark konsistente Schätzfunktionen zeigen.

Dieser Zugang über die Optimalitätsgleichung läßt sich auf abzählbare SMEM übertragen, wenn man sogenannte Ljapunoff-Bedingungen zugrundelegt, die schwache Rekurrenz- und Beschränktheitsforderungen kombinieren. Diese Bedingungen sind von Hordijk [15] für das einfache Entscheidungsmodell ohne "unbekannten"(bzw. mit "bekanntem") Parameter eingeführt worden. Mandl hat in [22] diesen Ansatz aufgegriffen und so erweitert, daß das folgende Optimalitätskriterium gilt:

Ein Plan ist durchschnittsoptimal (bzgl. R), wenn er die Optimalitätsgleichung "im Cēsaro-Mittel" erfüllt.

In [22] wird dieses Kriterium (in einem Modell mit "bekanntem" Parameter) benutzt, um die Optimalität von adaptiven Plänen zu zeigen, das sind Pläne, unter denen die Aktionen konvergieren und der Limes einem optimalen stationären Plan entspricht.

In der vorliegenden Arbeit wird mit diesem Kriterium die gleichmäßige Optimalität von $\hat{\delta}$ gezeigt. Dabei brauchen die Aktionen unter $\hat{\delta}$ nicht zu konvergieren. Stattdessen besteht das Problem darin, die Stetigkeit der Abbildung $\theta \to \phi_{\theta_0}(i, f_\theta(i))$ zu zeigen; dabei wird die Funktion ϕ_{θ_0} aus der Optimalitätsgleichung (für "bekanntes" θ_0) gewonnen. Das gelingt mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Maximum Theorems von Berge [2] und der Darstellung des (erwarteten) Durchschnittsgewinns mittels der eingebetteten Markoff-Kette über einer endlichen Menge von Zuständen. (In [21] hatte Mandl diese schwer nachzuprüfende Stetigkeitsbedingung als zusätzliche Voraussetzung eingeführt, die obigen Überlegungen zeigen aber, daß diese Voraussetzung schon aus den übrigen Stetigkeitsbedingungen von [21] folgt.)

Mit dem so gewonnenen Modell läßt sich der Plan $\hat{\delta}$ auf ein M/G/1-Warteschlangenmodell mit abzählbarem Warteraum anwenden. Dabei sind Ankunftsrate und Bedienungszeitverteilung steuerbar und hängen beide vom unbekannten Parameter ab. Unter relativ schwachen Beschränkungsforderungen an die Gewinnfunktion und Rekurrenzannahmen sind die Ljapunoff-Bedingungen in diesem Beispiel erfüllt. Für den Spezialfall "steuerbare Ankunftsrate - unbekannte Bedingungszeitverteilung" und dem dazu komplementären Fall ergeben sich geeignete Schätzfunktionen für die Konstruktion von $\hat{\delta}$ in natürlicher Weise. Im allgemeinen ist die Existenz einer solchen Schätzfunktion nur unter zusätzlichen Annahmen gesichert (s.u.).

Ein weiteres Resultat dieser Arbeit ist die Ausweitung des Verfahrens von Kurano und Mandl auf das bisher wenig untersuchte Kriterium S, das im Unterschied zu W wegen seiner Abhängigkeit von den Verweilzeiten nicht unmittelbar durch Rückführung auf die Markoff-Kette der Zustände untersucht werden kann. Stattdessen wird ein Umweg über das zunächst etwas unanschauliche Kriterium R genommen. Mit Hilfe eines Starken Gesetzes der Großen Zahlen für Martingale kann die Gleichung R = S (fast sicher) für alle Pläne gezeigt werden. Für festen, bekannten Parameter erhält man als Nebenergebnis, daß die für den erwarteten Durchschnittsgewinn W bekannten Verfahren und Ergebnisse weitgehend auch für das Kriterium S gelten, z. B. Aussagen über optimale, stationäre Pläne.

Georgin [9] hat die Ergebnisse von Mandl [21] auf den Fall eines überabzählbaren Zustandsraumes verallgemeinert, er benutzt ebenfalls den Zugang über die Optimalitätsgleichung. Dazu werden jedoch Voraussetzungen gemacht, die im abzählbaren Fall stärker sind als die hier betrachteten Ljapunoff-Bedingungen; so muß z.B. die Einschrittgewinnfunktion r beschränkt sein und - ebenso wie das Bewegungsgesetz - gleichgradig stetig vom Parameter $\theta \in \Theta$ abhängen, gleichgradig bzgl. Zustand und Aktion (alternativ zu dieser Forderung wird ein kompakter Zustandsraum betrachtet). Auch die Rekurrenzvoraussetzungen sind z.T. stärker als in der vorliegenden Arbeit.

Um die Existenz einer unter allen Plänen stark konsistenten Schätzfunktion zeigen zu können, müssen zusätzliche Identifizierbarkeitsvoraussetzungen gemacht werden. In der Literatur werden dazu verschieden starke Bedingungen formuliert. Kurano [18] fordert, daß die Abbildung $\theta \to q_\theta(j|i,a)$ für alle

(i,a,j) injektiv ist. Mandl [21] verlangt demgegenüber nur

$$\forall\theta \neq \theta' \ \exists i \ \forall a \ \exists j \quad q_\theta(j|i,a) \neq q_{\theta'}(j|i,a) \ .$$

Diese Voraussetzung wird in Georgin [9] für den überabzählbaren Zustandsraum wieder verschärft zu

$$\forall\theta \neq \theta' \ \forall i \ \forall a \ \exists B \quad q_\theta(B|i,a) \neq q_{\theta'}(B|i,a)$$

Varaiya [30] zeigt, daß ohne jede Identifizierbarkeitsvoraussetzung (bei endlichem Zustands- und Parameterraum) die Maximumlikelihood-Schätzung unter $\hat{\delta}$ zwar konvergiert, aber nicht notwendig gegen den "wahren" Wert, sondern gegen einen Wert θ^*, der unter f_{θ^*} dasselbe Bewegungsgesetz induziert wie der "wahre" Parameterwert; dabei geht jedoch die Optimalität des Verfahrens $\hat{\delta}$ verloren.

In der vorliegenden Arbeit wird unter den Identifizierbarkeitsvoraussetzungen von Mandl [21] die Konsistenz der Maximumlikelihood-Schätzung bzw. allgemeiner, der Minimumkontrast-Schätzung in einem abzählbaren SMEM hergeleitet, auch hier mit Hilfe von Ljapunoff-Bedingungen.

Der Aufbau der Arbeit

In Abschnitt 1 wird eine formale Definition eines SMEM unter Unsicherheit gegeben, es werden die verschiedenen Zielfunktionen W, R und S definiert und eine Liste der zentralen Voraussetzungen der nachfolgenden Abschnitte gegeben.

In Abschnitt 2 werden einige spezielle Hilfssätze bewiesen, u.a. über die Stetigkeit der Rückkehrzeiten in endlichen Markoff-Ketten und über die Stetigkeit von Integralen.

Abschnitt 3 befaßt sich mit der Vollständigkeit von Teilmengen von Δ; dabei enthält Δ alle randomisierten Pläne, die von der ganzen Vorgeschichte (einschließlich der Verweilzeiten) abhängen dürfen.

In Abschnitt 4 wird mit Hilfe der Rückkehrzeiten eine äquivalente, anschaulichere

Formulierung der Ljapunoff-Bedingungen gegeben. Beide Formulierungen werden im folgenden nebeneinander verwendet.

Federgruen et al. haben in [7] für die Untersuchungen des Durchschnittsgewinns die eingebettete Markoff-Kette über einer endlichen "Rückkehrmenge" betrachtet. Dieser Ansatz wird in Abschnitt 5 aufgegriffen und ausgeweitet.

In Abschnitt 6 werden - ausgehend von einer Verallgemeinerung eines Ergodensatzes - mit Hilfe der Resultate aus Abschnitt 5 verschiedene, einfache Darstellungen des (erwarteten) Durchschnittsgewinns W und R und der stationären Verteilungen gegeben. Für die Formulierung einiger Ergebnisse dieses Abschnitts waren Diskussionen mit Herrn H. Deppe, Bonn, sehr hilfreich.

Das Kernstück der Ljapunoff-Bedingungen bilden Beschränkungsfunktionen $y_k(\theta,\cdot)$, deren asymptotisches Verhalten in Abschnitt 7 untersucht wird. Wichtig für die Untersuchungen der Zielfunktionen R und S ist dabei ein Starkes Gesetz der Großen Zahlen für Martingal-Differenzen (aus [19]).

In Abschnitt 8 werden zunächst die wesentlichen Schritte aus [7] für die Herleitung der Optimalitätsgleichung bei "bekanntem" θ wiedergegeben. Daran schließt sich eine [21], [22] folgende Untersuchung der Optimalitätsgleichung an, die in der Formulierung der hinreichenden Optimalitätsbedingung (s.o.) resultiert.

Abschnitt 9 enthält die zentralen Aussagen für die Konstruktion des gleichmäßig optimalen Planes, zunächst für W und R. Unter zwei verschiedenen Rekurrenz-Annahmen wird dazu die Stetigkeit von $\theta \to \Phi_{\theta_0}(i,f_\theta(i))$ nachgewiesen. In diesem Zusammenhang werden einige Aussagen über die Halbstetigkeit von mengenwertigen Abbildungen bewiesen.

In Abschnitt 10 werden die Ergebnisse in verschiedene Richtungen ergänzt. Zunächst wird die fast sichere Übereinstimmung von R und S gezeigt und auf die Konsequenzen eingegangen. Daraufhin wird für den Fall, daß zu jedem Schätzwert nur ein "fast-optimaler" Plan zu Verfügung steht, die Güte des Verfahrens $\hat{\delta}$ von Kurano-Mandl untersucht. Weiter wird auf die Unterschiede zwischen den Ljapunoff-Bedingungen bei Hordijk [15] und Federgruen et al. [7] eingegangen. Für den Spezialfall des endlichen Zustandsraums wird gezeigt,

daß die Ljapunoff-Bedingungen in dem Modell von Mandl erfüllt sind und sogar noch abgeschwächt werden können durch die Einbeziehung von transienten Zuständen. Schließlich wird noch kurz auf das Konzept der exzessiven Funktionen von van Hee und Wessels [12] eingegangen, das die Gültigkeit der Ljapunoff-Bedingungen impliziert.

In Abschnitt 11 wird als Beispiel aus der Warteschlangentheorie ein M/G/1-Modell betrachtet, in dem Ankunftsrate und Bedienungszeitverteilung kontrollierbar sind und von einem unbekannten Parameter abhängen dürfen. Die Ljapunoff-Bedingungen sind dann erfüllbar bei schwachen Beschränkungsforderungen an die Gewinnfunktion und einer maximalen Verkehrsintensität kleiner als 1. Für Spezialfälle dieses Beispiels lassen sich Schätzfunktionen angeben, die die notwendigen Konsistenzeigenschaften für $\hat{\delta}$ haben.

In Abschnitt 12 wird das Konzept der Minimumkontrast-Schätzfunktionen, wie es von Mandl [21] für das endliche Markoff'sche Entscheidungsmodell formuliert wurde, auf das abzählbare SMEM übertragen und es werden (Ljapunoff-) Bedingungen für die starke Konsistenz der damit gewonnenen Schätzer angegeben.

Zur Notation

Einige Bezeichnungen werden ohne Erläuterung benutzt :

$\mathbb{N}$	bezeichne die natürlichen Zahlen ,
$(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$	bezeichne die reellen Zahlen, versehen mit der Borel'schen σ - Algebra ,
$(\mathbb{R}^1_+, \mathcal{B}^1_+)$	bezeichne entsprechend die nicht-negativen reellen Zahlen ,
$P(B)$	bezeichne die Potenzmenge einer Menge B ,
χ_B	bezeichne den Indikator einer Menge B ,
$<B_i \mid i \in I>$	bezeichne eine Familie von Objekten, indiziert durch $i \in I$,
(d_m)	bezeichne die Folge (den Prozeß) $(d_m)_{m \in \mathbb{N}}$,
$\mathbb{P}(B)$	bezeichne die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Meßraum $(B, \mathcal{B})$,
f.s.	bedeutet "fast sicher",im Zusammenhang mit bedingten Erwartungswerten wird dieser Zusatz im folgenden stets unterdrückt ,
(n.W.P)	bedeutet "Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit P" , bzw. "P-stochastische Konvergenz" ,
const	bezeichne eine nicht näher spezifizierte,reelle Konstante mit jeweils nur 'lokaler' Bedeutung (z.B. für einen Satz)
o.E.	bedeutet "ohne Einschränkung (der Allgemeinheit)" .

Das Symbol für den bedingten Erwartungswert (etwa $E[V_m \mid X_o, \ldots, X_n]$) wird sowohl für die Funktion auf dem Grundraum Ω , als auch für die entsprechende Funktion auf dem Bildraum (von $X_o, \ldots, X_n$) benutzt.

1. Das Semi-Markoff'sche Entscheidungsmodell unter Unsicherheit

1.A Definition des Modells

Es wird das folgende (verallgemeinerte) Semi-Markoff'sche Entscheidungsmodell unter Unsicherheit (I,A,D,Θ,Y,Q,r) betrachtet:

I sei der abzählbare Zustandsraum;

$(A,\mathcal{A})$ sei der Aktionenraum (Standardborelraum);

Θ sei der Parameterraum (metrischer Raum);

$(Y,\mathcal{Y})$ sei der Raum der Hilfsbeobachtungen (Standardborelraum);

$D: I \to P(A) \setminus \{\phi\}$
$D(i)$ bezeichne die Menge der zulässigen Aktionen im Zustand i;
mit $K := \{(i,a) | i \in I,\ a \in D(i)\}$, $Z := Y \times \mathbb{R}^1_+$ und $\mathcal{Z} := \mathcal{Y} \times \mathcal{B}^1_+$ sei
$Q: \Theta \times K \to \mathbb{P}(I \times Z)$ das Bewegungsgesetz, so daß gilt:
$\forall \theta \in \Theta \quad \forall i,j \in I \quad \forall C \in \mathcal{Z} \quad a \to Q_\theta(j,C|i,a)$ meßbar;

$r: \Theta \times K \to \mathbb{R}^1$ mit
$\forall \theta \in \Theta \quad \forall i \in I \quad a \to r_\theta(i,a)$ meßbar
sei die (Einschritt-) Gewinnfunktion.

Q ist für festes $\theta \in \Theta$ eine OW von K nach $I \times Y \times \mathbb{R}^1_+$, dabei wird $Q_\theta(j,B \times [0,t] | i,a)$ für $B \in \mathcal{Y}$ als die Wahrscheinlichkeit interpretiert, mit der das System vom Zustand $i \in I$ unter der Aktion $a \in D(i)$ innerhalb des Zeitintervalls $[0,t]$ in den Zustand $j \in I$ springt, wobei eine Hilfsbeobachtung aus der Menge B gemacht wird und $\theta \in \Theta$ der zugrundeliegende Parameter ist.

Bei diesem Übergang fällt der Gewinn $r_\theta(i,a)$ an. Ist Y einelementig, so reduziert sich das Modell auf ein Semi-Markoff'sches Entscheidungsmodell unter Unsicherheit.

1.B Zulässige Pläne

Aktionen dürfen in Abhängigkeit von der ganzen beobachtbaren Vergangenheit gewählt werden.
Dazu sei Δ die Menge aller Pläne $\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots)$, so daß gilt

$$\delta_0 \colon I \to \mathbb{P}(A) \quad \text{, mit } \delta_0(D(i)|i) = 1 \quad \text{für } i \in I,$$

und für $m \geq 1$

$$\delta_m \colon I \times (A \times I \times Z)^m \to \mathbb{P}(A) \quad \text{OW, mit}$$

$$\delta_m(D(i_m)|i_0,a_0,i_1,\ldots,a_{m-1},i_m,z_m) = 1$$

für $i_k \in I$, $z_k \in Z$ $(k = 0,\ldots,m)$ und $a_k \in A$ $(k = 0,\ldots,m-1)$.

Weiter betrachtet man als Teilmenge von Δ die Menge Δ' aller randomisierten Pläne δ', die nur von vorangegangenen Zuständen und Aktionen abhängen, d.h. Δ' ist die Menge aller $\delta' = (\delta'_0,\delta'_1,\ldots)$, so daß gilt

$$\delta'_0 \colon I \to \mathbb{P}(A) \quad \text{mit } \delta_0(D(i)|i) = 1 \quad \text{für } i \in I,$$

und für $m \geq 1$

$$\delta'_m \colon I \times (A \times I)^m \to \mathbb{P}(A) \quad \text{OW , mit}$$

$$\delta'_m(D(i_m)|i_0,a_0,\ldots,a_{m-1},i_m) = 1$$

für $i_k \in I$ $(k = 0,\ldots,m)$ und $a_k \in A$ $(k = 0,\ldots,m-1)$.

Die Menge Δ'_M soll alle Markoffpläne in Δ' umfassen, d.h.

$$\Delta'_M := \{\delta' \in \Delta' | \delta' = (\delta'_0,\delta'_1,\ldots),\ \forall n \geq 0\ \ \delta'_n \colon I \to \mathbb{P}(A);\ \forall i \in I\ \ \delta'_n(D(i)|i)$$

$\mathbb{F}$ bezeichne die Menge der deterministischen Pläne, die nicht von den vorangegangenen Aktionen abhängen, d.h. $\mathbb{F}$ ist die Menge aller $\delta = (f_0,f_1,\ldots)$, so daß gilt

$$f_0 \colon I \to A \quad \text{mit } f(i) \in D(i) \quad \text{für } i \in I$$

und für $m \geq 1$

$$f_m \colon I \times (Z \times I)^m \to A, \text{ meßbar, mit}$$

$$f_m(i_0,z_1,\ldots,z_m,i_m) \in D(i_m) \quad \text{für } i_k \in I,\ z_k \in Z \quad (k = 0,\ldots,m)$$

Die f_m lassen sich als degenerierte ÖWs auffassen, so daß $\mathbb{F}$ als Teilmenge von Δ betrachtet werden kann.

In $\mathbb{F}$ betrachtet man wiederum die Menge der deterministischen Markoffpläne F_M:

$$F_M := \{\delta | \delta = (f_0, f_1, \ldots), \forall n \geq 0 \quad \forall i \in I \quad f_n: I \to A, f_n(i) \in D(i)\}$$

und die Menge der stationären Pläne F:

$$F := \{\delta | \delta = (f, f, \ldots), f: I \to A, \quad \forall i \in I \quad f(i) \in D(i)\} .$$

F und F_M werden ebenfalls als Teilmengen von Δ betrachtet. F wird wie üblich mit der Menge

$$\underset{i \in I}{X} D(i) = \{f | f: I \to A, \forall i \in I \quad f(i) \in D(i)\}$$

gleichgesetzt. Ein Element $\delta = (f, f, \ldots) \in F$ wird kurz mit f bezeichnet.

1.C Der Wahrscheinlichkeitsraum und die Prozesse (X_m), (A_m), (Z_m)

Es sei $\bar{y} \in Y$ fest vorgegeben, dann gilt (vgl. Hinderer [13], S. 78 ff.) durch $i \in I$, $\theta \in \Theta$ und $\delta \in \Delta$ ist ein W-Maß $P^i_{\theta,\delta}$ auf $\Omega := (I \times Z \times A)^\infty$ bestimmt, für das gilt

$$P^i_{\theta,\delta}\left[X_n=j,\ Z_n \in C_n,\ A_n \in B_n \middle| X_{n-1},Z_{n-1},A_{n-1},\ldots,X_0,Z_0,A_0\right]$$

$$= \int_{C_n}\int_{B_n} \delta_n(da|j,z,X_{n-1},\ldots,X_0,A_0,Z_0)Q_\theta(j,dz|X_{n-1},A_{n-1}) ,$$

für $j \in I$, $C_n \in Z$ und $B_n \in A \cap D(j)$, $(n \geq 1)$;

sowie

$$P^i_{\theta,\delta}\left[X_0=j,\ Z_0 \in C_0,\ A_0 \in B_0\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{, falls } j \neq i \text{ oder } (\bar{y},0) \notin C_0 \\ \delta_0(B_0|j) & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Dabei bezeichne für $n \geq 0$

X_n die Projektion von Ω auf die n-te I-Koordinate

Z_n die Projektion —— " " —— Z-Koordinate

A_n die Projektion —— " " —— A-Koordinate

Weiter sei

Y_n die Projektion von Ω auf die n-te Y-Koordinate und

T_n die Projektion —— " " —— $\mathbf{R}^1_+$-Koordinate,

also $Z_n = (Y_n,T_n)$.

$(A_{n-1},X_n,Z_n) = (A_{n-1},X_n,Y_n,T_n)$ und $P^i_{\theta,\delta}$ beschreiben den Verlauf von Aktionen, Zuständen, Hilfsbeobachtungen und Verweilzeiten bei Zugrundeliegen des Parameters $\theta \in \Theta$, Benutzung des Plans $\delta \in \Delta$ und Start in $(X_0,Z_0) = (i,\bar{y},0)$.

Bei allen folgenden Betrachtungen wird $T_0 = 0$ und $Y_0 = \bar{y}$ gesetzt, daher wird die Größe $Z_0 = (Y_0, T_0)$ nicht mehr explizit erwähnt.
Falls $Y = \{\bar{y}\}$ gilt, wird $Z_n = T_n$ gesetzt. Statt $P^i_{\theta,\delta}[\cdot]$ wird auch $P_{\theta,\delta}[\cdot | X_0 = i]$ geschrieben.

Für die gemeinsame (bedingte) Verteilung von (X_n, Z_n) gilt dann

$$P_{\theta,\delta}\left[X_n = j,\ Z_n \in C_n \middle| X_{n-1}, Z_{n-1}, A_{n-1}, \ldots, X_0\right] = \int_{C_n} Q_\theta(j, dz | X_{n-1}, A_{n-1}) \quad .$$

Eine wichtige Rolle spielt die Randverteilung von (X_n)

$$P_{\theta,\delta}\left[X_n = j \middle| X_{n-1}, Z_{n-1}, A_{n-1}, \ldots, X_0\right] = \int_Z Q_\theta(j, dz | X_{n-1}, A_{n-1})$$

$$=: q_\theta(j | X_{n-1}, A_{n-1})$$

q_θ ist für jedes $\theta \in \Theta$ eine ÜW von K nach I.

Für $f \in F$ gilt

$$P_{\theta,f}\left[X_n = j \middle| X_{n-1}, Z_{n-1}, A_{n-1}, \ldots, X_0\right] = q_\theta(j | X_{n-1}, f(X_{n-1}))$$

$$= P_{\theta,f}\left[X_n = j \middle| X_{n-1}\right]$$

d.h. unter $f \in F$ bildet (X_n) eine Markoffkette mit der stationären ÜW $q_\theta(\cdot | \cdot, f(\cdot))$. Mit $P_{\theta,f}$ wird im folgenden auch die zugehörige Matrix der ÜW's bezeichnet.

Der bezüglich $P_{\theta,\delta}[\cdot | X_0 = i]$ gebildete (bedingte) Erwartungswert wird mit $E_{\theta,\delta}[\cdot | X_0 = i]$ bezeichnet.

Für die erwartete Verweilzeit gilt dann:

$$E_{\theta,\delta}\left[T_n \middle| X_n, A_n, X_{n-1}, Z_{n-1}, \ldots, X_0\right]$$

$$= \sum_{j \in I} \int_Y \int_0^\infty t\, Q_\theta(j, d(y,t) | X_{n-1}, A_{n-1}) = \int_0^\infty t\, Q_\theta(I, Y, dt | i, a)$$

$$=: t_\theta(X_{n-1}, A_{n-1})$$

also

$$t: \Theta \times K \to \mathbb{R}_+^1 \quad \text{und}$$

$$\forall \theta \in \Theta \quad \forall i \in I \quad a \to t_\theta(i,a) \quad \text{meßbar.}$$

1.D Das Durchschnittsgewinnkriterium

In dieser Arbeit werden mehrere eng zusammenhängende Zielfunktionen betrachtet, die verschiedene Betrachtungsweisen des Durchschnittsgewinns darstellen.
Für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$ definiert man:

$$W(\theta,\delta,i) := \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}[r_\theta(X_m,A_m)|X_0 = i]}{\sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}[T_{m+1}|X_0 = i]}$$

$$= \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}[r_\theta(X_m,A_m)|X_0 = i]}{\sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}[t_\theta(X_m,A_m)|X_0 = i]}$$

(dabei sei der Nachweis der Existenz der Integrale zunächst zurückgestellt).
$W(\theta,\delta,i)$ beschreibt den erwarteten Durchschnittsgewinn als (asymptotisch) durchschnittlichen erwarteten Gewinn pro Einheit der "erwarteten Zeit".
$W(\theta,\delta,i)$ entspricht dem in Semi-Markoff-Modellen üblichen erwarteten Durchschnittsgewinn (vgl. [26] 7.3, [7]).

Formal analog zu W bildet man

$$R(\theta) := \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} r_\theta(X_m,A_m)}{\sum_{m=0}^{N-1} t_\theta(X_m,A_m)}$$

$R(\theta)$ beschreibt den (asymptotisch) durchschnittlichen Gewinn pro erwarteter Verweilzeit, das entspricht für $t_\theta(i,a) \equiv 1$ dem Durchschnittsgewinnkriterium wie es etwa in [21], [22] verwendet wird.
$R(\theta)$ hängt von dem zugrundeliegenden Plan nur über die Verteilung von X_m, A_m ab. Für $\delta = f \in F$ kann R als Funktion des X_m-Prozesses alleine aufgefaßt werden (mit $A_m = f(X_m)$), dafür wird dann $R(\theta,f)$ geschrieben.

Für R und W läßt sich die Existenz "optimaler" Pläne (s.u.) nachweisen, wobei für beide Kriterien im wesentlichen dieselben Voraussetzungen gemacht werden.

Unter weiteren Voraussetzungen (vgl. Abschnitt 10.A) können aus den Resultaten für $R(\theta)$ die entsprechenden Aussagen für $S(\theta)$ abgeleitet werden, wobei

$$S(\theta) := \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} r_\theta(X_m, A_m)}{\sum_{m=0}^{N-1} T_{m+1}} .$$

In demselben Zusammenhang kann auch eine zusätzliche Abhängigkeit der Gewinnfunktion von X_{m+1}, T_{m+1} zugelassen werden.

$S(\theta)$ beschreibt den (asymptotisch) durchschnittlichen Gewinn pro Zeiteinheit.

Im folgenden werden aber zunächst die Aussagen für W und R bewiesen, in Abschnitt 10.A werden die Voraussetzungen formuliert, unter denen $R(\theta) = S(\theta)$ (f.s.) gilt.

Die folgenden Definitionen präzisieren den Begriff "optimaler Plan".

Definition:

1. Für $\theta \in \Theta$ heißt $\delta^* \in \Delta$ <u>θ-optimal bzgl. W</u>
   $: \Leftrightarrow \forall \delta \in \Delta \quad \forall i \in I \quad W(\theta,\delta,i) \leq W(\theta,\delta^*,i)$

2. $\delta^* \in \Delta$ heißt <u>optimal bzgl. W</u>
   $: \Leftrightarrow \forall \theta \in \Theta \quad \delta^*$ ist θ-optimal bzgl. W.

Für die Kriterien R und S wird das ess sup der Zufallsgrößen R und S zugrundegelegt.

Für $X: \Omega \to \mathbb{R}^1$ und $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$, $i \in I$ sei (vgl. [1] , S. 89)

$$(\theta,\delta,i) \text{ - ess sup } X := \inf \{c \in \mathbb{R}^1 \mid P_{\theta,\delta}[X > c | X_0 = i] = 0\}$$

und

(θ,δ,i) - ess inf $X := -(\theta,\delta,i)$ - ess sup $(-X)$.

Damit definiert man

3. Für $\theta \in \Theta$ heißt $\delta^* \in \Delta$ <u>θ-optimal bzgl. R</u>

   $:\Leftrightarrow \forall \delta \in \Delta \quad \forall i \in I \quad (\theta,\delta,i)$ - ess sup $R(\theta) \leq (\theta,\delta,i)$ - ess inf $R(\delta^*)$.

4. $\delta^* \in \Delta$ heißt <u>optimal bzgl. R</u>

   $:\Leftrightarrow \forall \theta \in \Theta \quad \delta^*$ ist θ-optimal bzgl. R.

Entsprechend wird "(θ)-optimal bzgl. S" mit S anstelle von R definiert.

<u>Bemerkung</u>:

(θ,δ,i) - ess sup $R(\theta)$ ist die kleinste Zahl c, so daß

$$R(\theta) \leq c \quad (P^i_{\theta,\delta} \text{ - f.s.}) .$$

Daher folgt für $\theta \in \Theta$

$$\delta^* \in \Delta \quad \theta\text{-optimal bzgl. } R(\theta)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall \delta \in \Delta \quad R(\theta) \leq c \quad (P^i_{\theta,\delta} \text{ - f.s.}) \text{ und}$$
$$c \leq R(\theta^*) \quad (P_{\theta,\delta^*} \text{ - f.s.}) ;$$

ebenso für S anstelle von R.

1.E Voraussetzungen

Im folgenden werden alle Bedingungen zusammengestellt, die für die Abschnitte 1-9 gebraucht werden. Bei den nachfolgenden Beispielen und Ergänzungen werden die speziellen Bedingungen einzeln formuliert.

Es werden vier Gruppen von Aussagen bei diesen zentralen Voraussetzungen gemacht:

(T) betrifft die Verteilung des T_m-Prozesses,

(C) umfaßt grundlegende Stetigkeits- und Kompaktheitsforderungen,

(L) enthält die sogenannten Ljapunoff-Bedingungen, die die Existenz von Beschränkungsfunktionen mit speziellen Eigenschaften verlangen,

(I) stellt Rekurrenz-Forderungen an die induzierten Markoff-Ketten.

Die Liste der Voraussetzungen ist nicht "minimal", einige der Implikationen besonders zwischen den (L)-Bedingungen sind in der Bemerkung unten zusammengefaßt und werden im Laufe der Arbeit bewiesen.

Die (L)-Bedingungen umfassen als Forderung die Existenz einer endlichen Menge $H \subset I$ und die Existenz von Funktionen $y_1, y_2, y_3, y_4 : \Theta \times I \to \mathbb{R}^1_+$, auf die die Aussagen L_{1-9} zutreffen.

Für $\theta \in \Theta$ und $f \in F$ sei $\hat{P}_{\theta,f}(i,j) := P_{\theta,f}(i,j)\chi_{\{j \notin H\}}$, d.h. $\hat{P}_{\theta,f}$ entsteht aus $\hat{P}_{\theta,f}$ durch Ersetzen der $j \in H$ entsprechenden Spalten durch Nullvektoren, so daß z.B. gilt $\hat{P}_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) = \sum_{j \in I \setminus H} q_\theta(j|i,f(i)) y_1(\theta,j)$. $\hat{P}^m_{\theta,f}$ bezeichne entsprechend das m-fache Produkt von $\hat{P}_{\theta,f}$. Für $\theta \in \Theta$, $f \in F$ sei $r_{\theta,f}(i) := r_\theta(i,f(i))$, entsprechend $t_{\theta,f}$. $F = \underset{i \in I}{\times} D(i)$ sei mit der Produktcpologie der $D(i)$ versehen, so daß die Stetigkeit (z.B. von $r_{\theta,f}(i)$) in f mit der Stetigkeit (von $r_\theta(i,a)$) in a äquivalent ist.

Mit diesen Vorbereitungen können die Voraussetzungen formuliert werden:

(T) $\exists \eta > 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad \forall (i,a) \in K \quad 0 < \eta \le t_\theta(i,a) < \infty$.

(C) (C_1) $\forall i \in I \quad D(i)$ kompakt ,

(C_2') $\forall \theta \in \Theta \quad \forall i,j \in I$

$a \to r_\theta(i,a)$, $a \to t_\theta(i,a)$, $a \to q_\theta(j|i,a)$ sind stetig ,

(C_2) $\forall i,j \in I$ $\quad (\theta,a) \to r_\theta(i,a)$,

$(\theta,a) \to t_\theta(i,a)$ und $(\theta,a) \to q_\theta(j|i,a)$ sind stetig,

(C_3) Θ kompakt .

(L) (L_1) $\forall \theta \in \Theta \quad \forall i \in I \quad \forall f \in F$

$$|r_{\theta,f}(i)| + t_{\theta,f}(i) + 1 + \hat{P}_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \le y_1(\theta,i) \quad ,$$

(L_2) $\forall i \in I \quad \theta \to y_1(\theta,i)$ stetig ,

(L_3') $\forall \theta \in \Theta \quad \forall i \in I \quad f \to P_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i)$ stetig ,

(L_3) $\forall i \in I \quad (\theta,f) \to P_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i)$ stetig ,

(L_4') $\forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad \forall i \in I \quad \hat{P}^m_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$,

(L_4) $\forall i \in I \quad \hat{P}^m_{\theta,f} y_1(\theta,\cdot)(i) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ gleichmäßig in $(\theta,f) \in \Theta \times F$,

(L_5) $\forall \theta \in \Theta \quad \forall i \in I \quad \forall f \in F$

$$y_1(\theta,i) + 1 + \hat{P}_{\theta,f}\, y_2(\theta,\cdot)(i) \le y_2(\theta,i) \quad ,$$

(L_6) $\forall \theta \in \Theta \quad \forall i \in I \quad f \to P_{\theta,f}\, y_2(\theta,\cdot)(i)$ stetig ,

(L_7) $\forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad \forall i \in I \quad \hat{P}^m_{\theta,f}\, y_2(\theta,\cdot)(i) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$,

(L_8) $\forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad \forall i \in I$

$$y_1(\theta,i)^2 + \hat{P}_{\theta,f}\, y_3(\theta,\cdot)(i) \le y_3(\theta,i) \quad ,$$

(L_9) $\forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad \forall i \in I$

$$y_2(\theta,i)^2 + \hat{P}_{\theta,f}\, y_4(\theta,\cdot)(i) \le y_4(\theta,i) \quad .$$

(I) (I_1) $\forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F$ die Markoff-Kette $((X_m),P_{\theta,f})$ besitzt keine zwei disjunkten, abgeschlossenen Klassen ,

(I_2) $\forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F$ die Markoff-Kette $((X_m),P_{\theta,f})$ ist irreduzibel und positiv rekurrent .

Bemerkungen

1. Es gelten offensichtlich folgende Implikationen:
   $(C_2) \Rightarrow (C_2')$, $(L_3) \Rightarrow (L_3')$, $(L_4) \Rightarrow (L_4')$,
   $(L_8) \Rightarrow (L_5)$, $(L_{5,9}) \Rightarrow (L_8)$ und $(I_2) \Rightarrow (I_1)$.
2. Im einzelnen wird noch gezeigt:

$(C_2')(L_{5,6}) \Rightarrow (L_3')$ (folgt aus Satz 2.3)

$(L_5) \Rightarrow (L_4')$ (vgl. Bem. zu Satz 4.2)

$(L_9) \Rightarrow (L_7)$ (vgl. Bem. zu Satz 4.2)

$(C_{1-3})(L_{1-3,4'}) \Rightarrow (L_4)$ (vgl. Satz 2.4 (b))

$H = \{i^*\},(L_1) \Rightarrow (I_1)$ (vgl. Bem 2 zu Satz 6.1)

3. Die (absolute) Konvergenz der Summen $P_{\theta,f}\, y_k(\theta,\cdot)$ bzw. $\hat{P}_{\theta,f}\, y_k(\theta,\cdot)$ $(k = 1,2)$ in $(L_{3,4})$ und $(L_{6,7})$ folgt aus (L_1) und (L_5)

4. Zu den Voraussetzungen im einzelnen

   (T) verhindert, daß die Verweilzeiten f.s. auf 0 konzentriert sind bzw. den Wert $+\infty$ mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen.
   Dadurch sind auch die Nenner in den Zielfunktionen R und W f.s. positiv.

   (C) verlangt die üblichen Stetigkeits- und Kompaktheitsvoraussetzungen (vgl. [7]) ausgeweitet auf Θ. Die Kompaktheit von Θ wird hauptsächlich für Konstruktion einer konsistenten Schätzfunktion in den Abschnitten 11 und 12 verwendet.

   (L) ermöglicht durch die Einführung der sogenannten Ljapunoff-Funktionen y_k (vgl. [15] , [22] , [7]) die Einbeziehung unbeschränkter Gewinnfunktionen (bzw. unbeschränkter $t_\theta(i,a)$).
   Gleichzeitig wird durch (L_1) (bzw. $(L_{5,8,9})$) die Rückkehrzeit in die Menge H und der bis dahin zu erwartende Gewinn gleichmäßig in $f \in F$ beschränkt (vgl. Abschnitt 4).
   (L_8) und (L_9) werden in Verbindung mit dem Kriterium $R(\theta)$ benutzt, für $W(\theta,\delta,i)$ genügt an den entsprechenden Stellen (L_1) bzw. (L_5).

5. Statt (L_1) kann auch einfach verlangt werden $(\theta \in \Theta,\ f \in F)$

$$|r_{\theta,f}| + t_{\theta,f} + \hat{P}_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot) \leq y_1(\theta,\cdot) \ .$$

Zusammen mit (T), d.h. $t_{\theta,f} \geq \eta > 0$ folgt daraus dann

$$e + \hat{P}_{\theta,f}\, \frac{1}{\eta}\, y_1(\theta,\cdot) \leq \frac{1}{\eta}\, y_1(\theta,\cdot) \ .$$

Aus beiden Ungleichungen folgt dann mit Lemma 4.1 wieder (L_1).

6. Es könnte auch $H = H(\theta)$ zugelassen werden, dadurch würden sich jedoch die Forderungen $(L_3)(L_4)$ erheblich verkomplizieren.

Zum Schluß dieses Abschnitts werden noch einmal einige im folgenden häufig benutzte Abkürzungen zusammengestellt:

$e: I \to \mathbb{R}^1$ mit $e(i) \equiv 1$;

$\zeta := (\theta, f)$ und $\mathfrak{Z} := \Theta \times F$, so daß z.B. $r_\zeta(i) = r_\theta(i, f(i))$ für $\zeta \in \mathfrak{Z}$;

für $B \subset I$, $B \neq \phi$ sei

$$\tau_0(B) := 0$$

$$\tau_{n+1}(B) := \inf \{m > \tau_n(B) | X_m \in B\},$$

für $\tau_n(\{i\})$ wird $\tau_n(i)$ geschrieben.

$\tau_n(B)$ beschreibt also die n-te Rückkehrzeit nach B, gemessen in "diskreter Zeit", d.h. ausgedrückt in der Anzahl der Sprünge.

2. Hilfssätze

Ein nützliches Hilfsmittel, um die Stetigkeit von Maxima zu beweisen, ist das folgende Lemma, das im Laufe der Arbeit häufig benutzt wird, onne jedesmal ausdrücklich erwähnt zu werden.
Eine ähnliche Aussage wird in Satz 9.3 (a) bewiesen.

Lemma 2.1

Seien X, Y topologische Räume, $u: X \times Y \to \mathbb{R}^1$ stetig und Y kompakt.
Dann gilt

$$x \to \max_{y \in Y} u(x,y) \quad \text{stetig .}$$

Beweis:

Folgt aus [2] S. 115 f Theorem 1 und 2.

Die Bedingungen (L_2) (L_3) bzw. (L_3') dienen dazu, Stetigkeitsaussagen für Funktionen $|u_\zeta| \leq y_1(\theta,\cdot)$ zu gewinnen. Dazu wird das folgende Lemma benutzt:

Lemma 2.2

Es sei X ein metrischer Raum,

$$b, d: I \times X \to \mathbb{R}_+^1 \quad \text{mit}$$

$$0 \leq b(i,x) \leq d(i,x) \quad \text{für} \quad i \in I,\ x \in X;$$

$$x \to b(i,x),\ d(i,x) \quad \text{stetig für} \quad i \in I \text{ und}$$

$$x \to \sum_{i \in I} d(i,x) < \infty \quad \text{stetig.}$$

Dann gilt für $J \subset I$

$$x \to \sum_{i \in J} b(i,x) < \infty \quad \text{stetig.}$$

Beweis:

Folgt aus 4.11 und 4.12 Lemma in [15].

Eine Anwendung auf die vorliegende Situation liefert

Satz 2.3

Es sei $u: \Theta \times F \times I \to \mathbb{R}^1$ und $M: \Theta \to \mathbb{R}^1_+$ mit

$$\forall\theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad \forall i \in I \quad |u(\theta,f,i)| \leq M(\theta) y_1(\theta,i)$$

(a) Gilt (C_2') $(L_{1,3'})$ und $f \to u(\theta,f,i)$ stetig, so folgt für $J \subset I$, $i \in I$

$$f \to \sum_{j\in J} q_\theta(j|i,f(i))u(\theta,f,j) < \infty \quad \text{stetig} .$$

(b) Gilt (C_2) (L_{1-3}),

$$(\theta,f) \to u(\theta,f,i) \quad \text{stetig für } i \in I \text{ und}$$
$$\theta \to M(\theta) \quad \text{stetig}$$

so folgt für $J \subset I$, $i \in I$

$$(\theta,f) \to \sum_{j\in J} q_\theta(j|i,f(i))u(\theta,f,j) < \infty \quad \text{stetig} .$$

Beweis:

Folgt aus Lemma 2.2 ∎

Satz 2.3 liefert Stetikeitsaussagen für Ausdrücke der Gestalt $(\theta,f) \to \hat{P}_{\theta,f}\, u_{\theta,f}(i)$. Entsprechende Aussagen für $(\theta,f) \to \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, u_{\theta,f}(i)$ erfordern gleichmäßige Konvergenz der Summen. Dazu:

Satz 2.4

(a) Unter $(C_{1,2'})$ $(L_{1,3',4'})$ gilt für $\theta \in \Theta$, $i \in I$

$$\hat{P}^m_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \text{gleichmäßig in } f \in F$$

(b) Unter (C_{1-3}) $(L_{1,2,3,4'})$ gilt für $i \in I$

$$\hat{P}^m_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \text{gleichmäßig in } (\theta,f) \in \Theta \times F .$$

Beweis:

(a) Sei $\theta \in \Theta$ und $i \in I$ fest.

1. Durch wiederholte Anwendung von Satz 2.3 (a) folgt

$$\forall m \geq 0 \quad f \to \hat{P}^m_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \text{ stetig.}$$

2. Aus (L_1): $\hat{P}_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot) \leq y_1(\theta,i)$ und damit

$$\hat{P}^m_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \downarrow (m \to \infty) \quad \text{für } f \in F\ .$$

3. Aus $(L_{4'})$ und 2.

$$\hat{P}^m_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \downarrow 0 \quad (m \to \infty)\ .$$

4. Mit dem Satz von Dini ([2] S. 106) folgt die Behauptung aus der Kompaktheit von F.

(b) Sei $i \in I$ fest.
Dann folgt wie in (a) aus Satz 2.3 (b) und $(L_{1,4'})$

$$(\theta,f) \to \hat{P}^m_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \text{ stetig}$$

und $\quad \hat{P}^m_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \downarrow 0 \quad (m \to \infty)$.

Aus der Kompaktheit von $\Theta \times F$ unter $(C_{1,3})$ folgt dann aus dem Satz von Dini wieder die Behauptung.

Der folgende Satz gilt allgemein für endliche Markoff-Ketten. Die Notation ist im Hinblick auf die Anwendung in späteren Abschnitten gewählt.

Satz 2.5

Es sei H eine endliche Menge und $\mathfrak{Z}$ ein topologischer Raum. Für $\zeta \in \mathfrak{Z}$ sei $Q_\zeta = (Q_\zeta(i,j))_{i,j}$ eine $(|H| \times |H|)$ - Markoff-Matrix, die keine zwei disjunkten, abgeschlossenen Klassen besitzt.
Für $i,j \in H$ sei $\zeta \to Q_\zeta(i,j)$ stetig. Dann gilt für die (eindeutig existierenden) stationären Verteilungen $\pi_\zeta(\cdot)$ und die (endlichen) Rückkehrzeiten $\mu_{i,j}(\zeta)$:

(a) $\forall i \in H \quad \zeta \to \pi_\zeta(i)$ ist stetig

(b) Ist $\mathfrak{Z}$ kompakt und $j \in H$ rekurrent unter Q_ζ für alle $\zeta \in \mathfrak{Z}$, so gilt

$$\forall i \in H \quad \zeta \to \mu_{i,j}(\zeta) \text{ stetig.}$$

Beweis:

(a) folgt aus der Endlichkeit von H z.B. mit [15] 10.2, 10.3 Lemma.

(b) 1. Für $i = j$ folgt wegen $\mu_{i,i}(\zeta) = (\pi_\zeta(i))^{-1}$ aus (a) die Stetigkeit von $\zeta \to \mu_{i,i}(\zeta)$. Für $i \neq j$ setzt man

$$\tau_1(j) := \inf \{n > 0 | X_n = j\};$$

dabei bezeichne (X_n) die Markoff-Kette. Wird mit Q_ζ auch das zugrundeliegende W-Maß bezeichnet, so zeigt man zunächst

$$Q_\zeta[\tau_1(j) \leq n | X_0 = i] \geq \rho > 0$$

für ein $n \geq 1$ und für alle $\zeta \in \mathfrak{Z}$, $i \in I$. Dann folgt die Behauptung mit [15] 11.5 Lemma.

2. Es gilt: $\exists \rho > 0 \quad \forall i \in H \quad \forall \zeta \in \mathfrak{Z} \quad Q_\zeta[\tau_1(j) \leq |H| \,|\, X_0 = i] \geq \rho$

denn: 2.1. Aus j rekurrent für alle $\zeta \in \mathfrak{Z}$ folgt

$$Q_\zeta[\tau_1(j) < \infty | X_0 = i] > 0 \quad \text{für } \zeta \in \mathfrak{Z}.$$

Daher gibt es einen minimalen Weg von i nach j, d.h.

$\forall \zeta \in \mathfrak{Z} \quad \forall i \in H \quad \exists n(\zeta,i) \quad \exists i_1, \ldots, i_{n(\zeta,i)} \in H$

$$i_1 = i,\ i_{n(\zeta,i)} = j \text{ und } \prod_{k=1}^{n(\zeta,i)-1} Q_\zeta(i_k, i_{k+1}) > 0$$

und $n(\zeta,i) \leq |H|$,

und daher

$\forall \zeta \in \mathfrak{Z} \quad \forall i \in H$

$$Q_\zeta[\tau_1(j) \leq |H| \,|\, X_0 = i] \geq \prod_{k=1}^{n(\zeta,i)-1} Q_\zeta(i_k, i_{k+1}) > 0.$$

2.2 Mit ${}_jQ_\zeta(i,h) := Q_\zeta(i,h) \cdot \chi_{\{h \neq j\}}$, $i,h \in H$ folgt wegen der

Endlichkeit von H für $m \geq 1$

$$\zeta \to {}_jQ_\zeta^m Q_\zeta(i,h) \quad \text{stetig,}$$

und daher auch

$$\zeta \to \sum_{m=1}^{|H|} {}_jQ_\zeta^{m-1} Q_\zeta(i,j)$$

$$= \sum_{m=1}^{|H|} Q_\zeta[\tau_1(j) > m-1,\ X_m = j | X_0 = i]$$

$$= Q_\zeta[\tau_1(j) \leq |H| \,|\, X_0 = i]$$

stetig.

2.3. Mit 2.1 und 2.3 folgt aus der Kompaktheit von $\mathfrak{Z}$ die Behauptung 2

3. (vgl. [15], 11.5 Lemma) Es gilt:

$$\forall \zeta \in \mathfrak{Z} \quad \forall i \in H \quad \forall N \geq 0$$

$$Q_\zeta[\tau_1(j) > N | X_0 = i] \leq (1-\rho)^{\left[\frac{N}{|H|}\right]}$$

wobei [x] "die größte ganze Zahl $\leq x$" ist.

<u>denn</u>: für $N \geq |H|$ gilt

$$Q_\zeta[\tau_1(j) > N | X_0 = i] =$$

$$= \sum_{h \neq j} Q_\zeta[X_{N-|H|} = h,\ \tau_1(j) > N-|H| \,|\, X_0 = i] \cdot Q_\zeta[\tau_1(j) > H | X_0 =$$

$$\leq Q_\zeta[\tau_1(j) > N-|H| \,|\, X_0 = i] \cdot (1-\rho)$$

$$\leq (1-\rho)^{\left[\frac{N}{|H|}\right]}$$

Wegen $(1-\rho)^{[\alpha]} = 1$ für $0 \leq \alpha < 1$ gilt die Behauptung auch für $N \leq |H|$.

4. Es gilt $\mu_{i,j}(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_\zeta[\tau_1(j) > m | X_0 = i]$, wie in 2.2 zeigt man

$\zeta \to Q_\zeta[\tau_1(j) > m | X_0 = i]$ stetig für $m \geq 0$.

Für $N \geq 0$ gilt

$$\sum_{m=N}^{\infty} Q_\zeta[\tau_1(j) > m | X_0 = i] \leq \sum_{m=N}^{\infty} (1-\rho)^{\left[\frac{m}{|H|}\right]}$$

$$= \sum_{m=N}^{\infty} |H| (1-\rho)^m = |H|\left(\rho^{-1} - \rho^{-1}(1 - (1-\rho)^N)\right)$$

$\to 0$ $(N \to \infty)$ gleichmäßig in $\zeta \in \mathcal{Z}$;

d.h. $\sum_{m=0}^{N-1} Q_\zeta[\tau_1(j) > m | X_0 = i] \to \mu_{ij}(\zeta)$ $(N \to \infty)$ gleichmäßig in $\zeta \in \mathcal{Z}$.

Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Bemerkung:

Aus dem Beweis folgt auch, daß unter den Voraussetzungen von Satz 2.5 (b) gilt: für $i,h,j \in H$

$$\zeta \to \sum_{m=0}^{\infty} {}_jQ_\zeta^m(i,h) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_\zeta[\tau_1(j) > m, X_m = h | X_0 = i] \text{ stetig.}$$

Das folgt unmittelbar aus dem Beweis von 2.5 (b) 4. wegen

$\zeta \to Q_\zeta[X_m = h, \tau_1(j) > m | X_0 = i]$ stetig und

$$\sum_{m=N}^{\infty} Q_\zeta[X_m = h, \tau_1(j) > m | X_0 = i] \leq \sum_{m=N}^{\infty} Q_\zeta[\tau_1(j) > m | X_0 = i].$$

Der folgende Satz wird in Abschnitt 12 benutzt, um die Stetigkeit von Dichten in einem Warteschlangenmodell zu zeigen.

Satz 2.6

Sei X ein metrischer Raum.

Sei $g: X \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ stetig,

$l: X \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, so daß

$x \to l(x,t)$ stetig für λ_1-fast alle $t \in [0,\infty)$,

$\forall x \in X \quad t \to l(x,t)$ λ_1-Dichte eines W-Maßes auf $([0,\infty), [0,\infty) \cap \mathcal{B}^1)$.

Dann gilt

$$(x,t) \to \int_0^t g(x,s)l(x,s)\,\lambda_1(ds) \quad \text{ist stetig auf } X \times [0,\infty).$$

Beweis:

1. Seien $(x_n,t_n) \in X \times [0,\infty)$ $(n \geq 0)$, so daß $(x_n,t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0,t_0)$.
   Abkürzend setzt man $g_n(s) := g(x_n,s)$, $g_0(s) := g(x_0,s)$ entsprechend l_n, l_0.

2. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\int_0^{t_0} g_0(s)l_0(s)\,\lambda_1(ds) - \int_0^{t_n} g_n(s)l_n(s)\,\lambda_1(ds)\right|$$

$$\leq \left|\int_0^{t_0} g_0(s)l_0(s)\,\lambda_1(ds) - \int_0^{t_n} g_0(s)l_0(s)\,\lambda_1(ds)\right|$$

$$+ \left|\int_0^{t_n} g_0(s)l_0(s)\,\lambda_1(ds) - \int_0^{t_n} g_0(s)l_n(s)\,\lambda_1(ds)\right|$$

$$+ \left|\int_0^{t_n} g_0(s)l_n(s)\,\lambda_1(ds) - \int_0^{t_n} g_n(s)l_n(s)\,\lambda_1(ds)\right|$$

3. Der erste Summand in 2. kann abgeschätzt werden durch

$$\max\{g_0(s) \mid 0 \leq s \leq t_0 + \varepsilon\}\ \mu([\min(t_0,t_n), \max(t_0,t_n)])$$

für n genügend groß, dabei sei μ das durch l_0 bestimmte W-Maß. Aus der Stetigkeit von μ folgt, daß dieser Ausdruck gegen 0 geht mit $n \to \infty$.

4. Für den zweiten Summanden folgt mit dem Lemma von Scheffé

$$\left| \int_0^{t_n} g_0(s) 1_0(s)\, \lambda_1(ds) - \int_0^{t_n} g_0(s) 1_n(s)\, \lambda_1(ds) \right|$$

$$\leq \int_0^{t_n} g_0(s) |1_0(s) - 1_n(s)|\, \lambda_1(ds)$$

$$\leq \max \{g_0(s) | 0 \leq s \leq t_0 + \varepsilon\} \int_0^{\infty} |1_0(s) - 1_n(s)| \lambda_1(ds) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad .$$

5. Der letzte Summand läßt sich abschätzen durch

$$\int_0^{t_n} |g_0(s) - g_n(s)| 1_n(s)\, \lambda_1(ds)$$

$$\leq \max \{|g_0(s) - g_n(s)| | 0 \leq s \leq t_0 + \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ ,$$

dabei wird die Stetigkeit von g ausgenutzt.

3. Die Vollständigkeit von Teilmengen von Plänen bei festem $\theta \in \Theta$

Die Suche nach einem optimalen Plan $\theta \in \Theta$ wird wesentlich vereinfacht, wenn man weiß, daß für eine Teilmenge $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ ein optimaler Plan $\delta \in \tilde{\Delta}$ existiert.

Der optimale Plan, der in Abschnitt 9 konstruiert wird, ist ein Element von $\mathbb{F}$, d.h. ein deterministischer Plan, der nur von (X_m, Z_m) abhängt. Daher ist $\mathbb{F}$ wesentlich vollständig in Δ bzgl. der "gleichmäßigen" Optimalität in θ (unter den Voraussetzungen (T) (C) und (L).)

In Abschnitt 8 wird gezeigt, daß unter etwas schwächeren Voraussetzungen für festes $\theta \in \Theta$ ein θ-optimaler stationärer Plan $f_\theta \in F$ existiert, d.h. daß F in Δ wesentlich vollständig bzgl. der θ-Optimalität ist (für R, W und S).

Derartige Vollständigkeitsaussagen können für festes $\theta \in \Theta$ aber auch ohne weitere Voraussetzungen aus der Struktur des Modells gefolgert werden. Dabei spielt eine wesentliche Rolle, daß der Prozeß (Z_m) nur über die Pläne δ in die Kriteriumsfunktionen W und R eingehen. Die Aussagen gelten also nicht für S und Erweiterungen auf $\tilde{r}_\theta(X_m, A_m, X_{m+1}, Z_m)$.

Mit $\mathcal{L}_{\theta,\delta}(X_n, A_n, \ldots, A_0 | X_0 = i)$ wird im folgenden die Randverteilung von $P^i_{\theta,\delta}$ auf $A \times (I \times A)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ bezeichnet. Entsprechend für $n = \infty$ mit $\mathcal{L}_{\theta,\delta}(X^\infty, A^\infty | X_0 = i)$.

Für M Menge und $u: \Delta \to M$ werden folgende Begriffe benutzt:

Definition:

1. $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ heißt vollständig in Δ bzgl. u
   $: \Leftrightarrow \forall \delta \in \Delta \quad \exists \tilde{\delta} \in \tilde{\Delta} \quad u(\delta) = u(\tilde{\delta})$
2. Ist $(M, \leq)$ geordnet, so heißt $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ wesentlich vollständig in Δ bzgl. u
   $: \Leftrightarrow \forall \delta \in \Delta \quad \exists \tilde{\delta} \in \tilde{\Delta} \quad u(\delta) \leq u(\tilde{\delta})$.

Für festes $\theta \in \Theta$ kann der (erwartete) Durchschnittsgewinn durch Abhängigkeit der Pläne von Z_n nicht gesteigert werden, für die Entscheidungen ist die Information aus dem (X_n, A_n)-Prozeß ausreichend:

Satz 3.1:

Für festes $\theta \in \Theta$ ist Δ' vollständig in Δ bzgl. der Abbildung

$$\delta \to \left\langle \mathcal{L}_{\theta,\delta}(X^{\infty},A^{\infty}|X_0 = i) \,\middle|\, i \in I \right\rangle$$

Beweis:

Sei $\theta \in \Theta$ fest. Es genügt zu zeigen:

$$\forall \delta \in \Delta \quad \exists \delta' \in \Delta' \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i \in I$$
$$\mathcal{L}_{\theta,\delta}(X_n,A_n,\ldots,A_0|X_0 = i) = \mathcal{L}_{\theta,\delta'}(X_n,A_n,\ldots,A_0|X_0 = i)$$

Dazu setzt man

$$\delta'_0 := \delta_0$$
$$\delta'_n(B_n|j_n,a_{n-1},\ldots,j_0) := P_{\theta,\delta}[A_n \in B_n|X_n = j_n,\ A_{n-1} = a_{n-1},\ldots,X_0 = j_0]$$
$$\text{für } n \geq 1,\ B_n \in A;\ j_n,\ldots,j_0 \in I,\ a_{n-1},\ldots,a_0 \in A\ .$$

Der Beweis der Behauptung folgt dann durch vollständige Induktion. ∎

Da die beiden Zielfunktionen R und W nur von den Randverteilungen auf $A \times (I \times A)^{\infty}$ abhängen, folgt aus Satz 3.1 unmittelbar, daß man sich bei festem θ bei der Suche nach θ-optimalen Plänen auf Δ' beschränken kann, genauer

Δ' ist vollständig in Δ bezüglich

$$\delta \to \langle W(\theta,\delta,i)|i \in I\rangle \text{ und}$$
$$\delta \to \langle (\theta,\delta,i) - \text{ess sup } R(\theta)|i \in I\rangle\ ,$$
$$\text{bzw. } \delta \to \langle (\theta,\delta,i) - \text{ess inf } R(\theta)|i \in I\rangle\ .$$

Die Optimierung der Funktion $W(\theta,\delta,i)$ hängt nur von $E_{\theta,\delta}[r_\theta(X_m,A_m)|X_0 = i]$ und $E_{\theta,\delta}[t_\theta(X_m,A_m)|X_0 = i]$ ab. Daher kann für das Kriterium W ein bekanntes Vollständigkeitsresultat aus [15] übertragen werden, das die Vollständigkeit der Markoff-Pläne sicherstellt.

Satz 3.2

(a) Für festes $\theta \in \Theta$ und festen Anfangszustand $i \in I$ gilt:
Δ'_M ist vollständig in Δ bzgl. $\delta \to \left\langle \mu_{\theta,\delta}(X_n, A_n | X_0 = i) \,\middle|\, n \geq 0 \right\rangle$

(b) Sei $u: I \times A \to \mathbb{R}^1$, dann gilt für festes $\theta \in \Theta$ und $i \in I$:
$\forall \delta' \in \Delta' \quad \exists \delta'' \in \Delta'_M \quad \forall n \geq 0$

$$E_{\theta,\delta'}[u(X_m, A_m) | X_0 = i] = E_{\theta,\delta''}[u(X_m, A_m) | X_0 = i]$$

(falls eines der Integrale existiert)

Beweis:

(a) vgl. [15] 13.2 Theorem
(b) folgt unmittelbar aus (a).

Für festes $\theta \in \Theta$ und festen Anfangszustand $i \in I$ folgt also:

Δ'_M ist vollständig in Δ' für $\delta \to W(\theta, \delta, i)$.

Satz 3.2 besagt nur die Vollständigkeit der Markoff-Pläne bzgl. der Randverteilungen auf $(I \times A)$. Daraus kann nicht auf die Vollständigkeit bzgl. der "ganzen" Verteilung $P^i_{\theta,\delta}$ geschlossen werden.
Deshalb folgt auch keine entsprechende Vollständigkeitsaussage für das Kriterium R.

4. Erwartete Rückkehrzeiten und Ljapunoff-Bedingungen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Ljapunoff-Bedingungen (L_1), (L_3) etc. äquivalent sind mit der Beschränktheit von bestimmten Rückkehrzeiten. Dadurch wird der Zusammenhang zwischen Ljapunoff-Bedingungen und Rekurrenzforderungen deutlich (vgl. Satz 6.1 unten). Die folgenden Aussagen beziehen sich auf (L_1), gelten aber entsprechend für (L_5) (L_8) und (L_9).

Lemma 4.1

Es existiert $y_1 : \Theta \times I \to \mathbb{R}_+^1$, so daß für $\theta \in \Theta$, $f \in F$

$$|r_{\theta,f}| + t_{\theta,f} + e + \hat{P}_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot) \leq y_1(\theta,\cdot) \quad \text{(d.h. } (L_1)\text{)}$$

$\Leftrightarrow$ es existieren y', y'', $y''' : \Theta \times I \to \mathbb{R}_+^1$, so daß für $\theta \in \Theta$, $f \in F$

$$|r_{\theta,f}| + \hat{P}_{\theta,f}\, y'(\theta,\cdot) \leq y'(\theta,\cdot) \quad ,$$

$$t_{\theta,f} + \hat{P}_{\theta,f}\, y''(\theta,\cdot) \leq y''(\theta,\cdot) \quad \text{und}$$

$$e + \hat{P}_{\theta,f}\, y'''(\theta,\cdot) \leq y'''(\theta,\cdot) \; .$$

Beweis:

"$\Rightarrow$" $y' := y'' := y''' := y_1$

"$\Leftarrow$" $y_1 := y' + y'' + y'''$ ∎

Bei der angegebenen Wahl von y', y'', y''' bzw. y_1 folgt die Gültigkeit von (L_2) - (L_{10}) für y', y'', y''' aus der Gültigkeit für y_1 und umgekehrt.

Satz 4.2

$(L_1) \Leftrightarrow \forall \theta \in \Theta \quad \forall i \in I$

$$\sup_{f \in F} E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(H)-1} |r_{\theta,f}(X_m)| \,\middle|\, X_0 = i\right] < \infty \quad \text{und}$$

$$\sup_{f \in F} E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(H)-1} t_{\theta,f}(X_m) \,\middle|\, X_0 = i\right] < \infty \quad \text{und}$$

$$\sup_{f\in F} E_{\theta,f}\,[\tau_1(H)|X_0 = i] < \infty,$$

wobei $E_{\theta,\delta}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(H)-1} t_\theta(X_m,A_m)|X_0 = i\right] = E_{\theta,\delta}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(H)-1} T_{m+1}|X_0 = i\right]$ für $\delta \in \Delta$ gilt.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Aus (L_1) folgt für $i \in I$, $\zeta \in \mathcal{Z}$

$$|r_{\theta,f}(i)| + \hat{P}_\zeta y_1(\theta,\cdot)(i) \le y_1(\theta,i) \quad .$$

Daraus folgt durch wiederholtes Einsetzen für $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m=0}^{N-1} \hat{P}_\zeta^m |r_\zeta|(i) + \hat{P}_\zeta^N y_1(\theta,\cdot)(i) \le y_1(\theta,i) < \infty$$

also wegen $y_1 \ge 0$ für alle $\zeta \in \mathcal{Z}$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}_\zeta^m |r_\zeta|(i)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j\in I} P_\zeta[X_m = j,\ \tau_1(H) > m|X_0 = i]|r_\zeta(j)|$$

$$= E_\zeta\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(H)-1} |r_\theta(X_m,A_m)|\,\middle|\,X_0 = i\right]$$

$$\le y_1(\theta,i) < \infty$$

Daraus folgt die erste Behauptung; der Beweis für t_ζ und e verläuft ebenso.

"$\Leftarrow$" (vgl. [7], Theorem 2.5).

Sei $y'(\theta,i) := \sup_{f\in F} E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(H)-1} |r_{\theta,f}(X_m)|\,\middle|\,X_0 = i\right]$, für festes $\theta \in \Theta$ wird gezeigt, daß $y'(\theta,i)$ Wertefunktion eines geeignet definierte Markoff'schen Entscheidungsmodells ist, für das

$\forall f \in F \quad |r_{\theta,f}| + P_{\theta,f}\, y'(\theta,\cdot) \leq y'(\theta,\cdot)$ gerade die Optimalitätsgleichung beschreibt.

1. Sie dazu s mit $s \notin I$ gegeben, dann definiert man

$$\tilde{I} := I \cup \{s\},$$

$$\tilde{D}(i) = \begin{cases} D(i) & i \neq s \\ \{b\} & i = s \end{cases} \quad \text{für ein } b \notin A,$$

$$\tilde{r}(i,a) := \begin{cases} |r_\theta(i,a)| & i \neq s \\ 0 & i = s \text{ und } a = b \end{cases},$$

$$\tilde{q}(j|i,a) := \begin{cases} q_\theta(j|i,a) & j \notin H,\ i \neq s \\ 0 & j \in H,\ i \neq s \\ q_\theta(H|i,a) & j = s,\ i \neq s \end{cases}, \text{ und}$$

$$\tilde{q}(j|s,b) := \begin{cases} 1 & j = s \\ 0 & j \neq 0 \end{cases}$$

d.h. im Modell $\tilde{\cdot}$ ist die Menge H durch den absorbierenden Zustand s "ersetzt" worden; in diesem Zustand fällt kein Gewinn mehr an, so daß gilt:

$$\sup_{\tilde{f}\in\tilde{F}} \tilde{E}_{\tilde{f}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{r}(\tilde{X}_m,\tilde{A}_m) | \tilde{X}_0 = i \right] \qquad , \quad i \neq s$$

$$= \sup_{\tilde{f}\in\tilde{F}} \tilde{E}_{\tilde{f}} \left[\sum_{m=0}^{\tilde{\tau}_1(s)-1} \tilde{r}(\tilde{X}_m,\tilde{A}_m) | \tilde{X}_0 = i \right]$$

$$= \sup_{\tilde{f}\in\tilde{F}} E_{\theta,f} \left[\sum_{m=0}^{\tau_1(H)-1} |r_{\theta,f}(X_m)| \,\middle|\, X_0 = i \right]$$

$$= \sup_{f\in F} E_{\theta,f} \left[\sum_{m=0}^{\tau_1(H)-1} |r_{\theta,f}(X_m)| \,\middle|\, X_0 = i \right] = y'(\theta,i)$$

dabei wird $\tilde{\tau}_1(s) = \inf \{n > 0 | X_n = s\}$ gesetzt und die Tatsache ausgenutzt, daß bis zum Zeitpunkt $\tilde{\tau}(s) - 1$ für $f := \tilde{f}|_I$ die durch

$\tilde{q}(\cdot|\cdot,\tilde{f}(\cdot))$ und $q_\theta(\cdot|\cdot,f(\cdot))$ bestimmten Bewegungsgesetze übereinstimmen und für $i \neq s$ $\tilde{\tau}_1(s) = \tau_1(H)$ $(P^i_{\theta,f}$ - f.s.) gilt.

2. Aus der positiven Dynamischen Optimierung folgt dann ([28] Satz 7.1, 9

$$y'(\theta,i) = \sup_{\tilde{\delta}\in\tilde{\Delta}'} \tilde{E}^{\tilde{\delta}}_{\tilde{\zeta}}\Big[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{r}(\tilde{X}_m,\tilde{A}_m)|\tilde{X}_0 = i\Big].$$

Ferner erfüllt $y'(\theta,i)$ die folgende Optimalitätsgleichung für $i \neq s$:

$$y'(\theta,i) = \sup_{a\in\tilde{D}(i)} \{\tilde{r}(i,a) + \sum_{j\in\tilde{I}} \tilde{q}(j|i,a)y'(\theta,j)\}$$

$$= \sup_{a\in D(i)} \{|r_\theta(i,a)| + \sum_{j\in I\setminus H} q_\theta(j|i,a)y'(\theta,j) + q_\theta(H|i,a)y'(\theta$$

$$= \sup_{a\in D(i)} \{|r_\theta(i,a)| + \sum_{j\in I\setminus H} q_\theta(j|i,a)y'(\theta,j)\}$$

wobei gilt $y'(\theta,s) := \sup_{\tilde{f}\in\tilde{F}} \tilde{E}^{\tilde{f}}_{\tilde{\zeta}}\Big[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{r}(\tilde{X}_m,\tilde{A}_m)|\tilde{X}_0 = s\Big]$

$= \tilde{r}(s,b)$ (s absorbierend)

$= 0.$

Dieselbe Überlegung gilt für $t_{\theta,f}$ und e anstelle von $|r_{\theta,f}|$. Lemma 4.1 liefert dann die Behauptung.

Bemerkung:

Aus (L_5) folgt wie im Beweis von Satz 4.2:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_\zeta y_1(\theta,\cdot)(i) \leq y_2(\theta,i) < \infty \text{ , für } \zeta = (\theta,f) \text{ ,}$$

daraus folgt aber

$$\hat{P}^m_\zeta y_1(\theta,\cdot)(i) \underset{m}{\to} 0 \text{ ,}$$

d.h. (L'_4). Ebenso folgt (L_7) aus (L_9).

Aus Satz 4.2 folgt also die Äquivalenz der Ljapunoff-Bedingung (L_1) mit der (in $f \in F$ gleichmäßigen) Beschränktheit der erwarteten Rückkehrzeit nach H in "stetiger" und "diskreter" Zeit und der erwarteten Gewinne bis zum Eintritt in H.

5. Der eingebettete Prozeß $\bar{X}_m$

Für die Analyse des Durchschnittsgewinnkriteriums erweist sich die Betrachtung des eingebetteten Prozesses über H als besonders günstig. (vgl. auch [7]). Insbesondere kann der Durchschnittsgewinn des ursprünglichen Prozesses als Durchschnittsgewinn des eingebetteten Prozesses formuliert werden; dabei können Eigenschaften der endlichen Markoff-Kette über H - besonders Stetigkeitsresultate - ausgenutzt werden.

Die zu dem eingebetteten Prozeß gehörenden Größen werden alle mit einem Querstrich gekennzeichnet.

Sei $\bar{X}_m := X_{\tau_m(H)}$, $m \geq 0$

(d.h. für $X_0 = X_{\tau_0(H)} \notin H$ beginnt der "eingebettete" Prozeß erst mit $\bar{X}_1$, für die Übersichtlichkeit der Darstellung ist es aber günstig, auch in diesem Falle $\bar{X}_0 = X_0$ zu setzen).

$\bar{X}_m$ bildet unter (L_1) eine Markoff-Kette mit dem endlichen Zustandsraum H und einer Übergangsmatrix $\bar{Q}_\zeta$, die im nächsten Lemma berechnet wird.

Es sei für $i,j \in I$, $\zeta \in \mathfrak{Z}$, $\zeta = (\theta,f)$

$$Q_\zeta(i,j) := \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}_\zeta^m P_\zeta(i,j)$$

und sei $\bar{Q}_\zeta(i,j)$ die Einschränkung von $Q_\zeta(i,j)$ auf $(i,j) \in H \times H$.
$Q_\zeta(i,j)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, von i nach j zu kommen, ohne vorher H zu berühren; d.h. in der Notation von Chung ([4], S. 46):

$$Q_\zeta(i,j) = {}_H P^*_{ij}(\zeta)$$

Lemma 5.1

(a) Für $i \in I$, $j \in H$, $\zeta \in \mathfrak{Z}$ gilt:

$$Q_\zeta(i,j) = P_\zeta[X_{\tau_1(H)} = j | X_0 = i]$$

und unter (L_1):

$$\sum_{j\in H} Q_\zeta(i,j) = 1$$

(b) Unter (L_1) gilt für $i,j \in H$, $n \geq 0$, $\zeta \in \mathcal{Z}$

$$P_\zeta[\bar{X}_{n+1} = j \,|\, \bar{X}_n = i] = \bar{Q}_\zeta(i,j)$$

Beweis:

(a) 1. $P_\zeta[X_{\tau_1(H)} = j \,|\, X_0 = i]$

$$= P_\zeta\Big[\bigcup_{m\geq 1} \{\tau_1(H) = m,\ X_m = j\} \,|\, X_0 = i\Big]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P_\zeta[\tau_1(H) > m-1,\ X_m = j \,|\, X_0 = i] \qquad (j \in H!)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \hat{P}_\zeta^{m-1} P_\zeta(i,j)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}_\zeta^{m} P_\zeta(i,j) = Q_\zeta(i,j)$$

2. $\sum_{j\in H} Q_\zeta(i,j)$

$$= \sum_{j\in H} \sum_{m=1}^{\infty} P_\zeta[\tau_1(H) > m-1,\ X_m = j \,|\, X_0 = i]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P_\zeta[\tau_1(H) > m-1,\ X_m \in H \,|\, X_0 = i]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P_\zeta[\tau_1(H) = m \,|\, X_0 = i]$$

$$= P_\zeta[\tau_1(H) < \infty \,|\, X_0 = i]$$

$$= 1$$

da sonst Widerspruch zu $E_\zeta[\tau_1(H) \,|\, X_0 = i] < \infty$ (Satz 4.2)

(b) $P_\zeta[\bar{X}_{n+1} = j | \bar{X}_n = i]$

$= P_\zeta[X_{\tau_{n+1}}(H) = j | X_{\tau_n}(H) = i]$

$= P_\zeta[X_{\tau_1}(H) = j | X_{\tau_0}(H) = i]$

$= Q_\zeta(i,j)$

Dabei wurde die starke Markoff-Eigenschaft von $((X_n), P_\zeta)$ ausgenutzt.

Für $\bar{X}_m$ lassen sich die $r_{\theta,f}$ und $t_{\theta,f}$ entsprechenden Funktionen angeben, indem die erwarteten Gewinne bzw. Verweilzeiten bis zum Wiedereintritt nach H aufsummiert werden.
Es sei für $i \in I$

$$\bar{r}_{\theta,f}(i) := \sum_{m=0}^{\infty} \hat{p}^m_{\theta,f}\, r_{\theta,f}(i)$$

$$\bar{t}_{\theta,f}(i) := \sum_{m=0}^{\infty} \hat{p}^m_{\theta,f}\, t_{\theta,f}(i)$$

$$\bar{m}_{\theta,f}(i) := \sum_{m=0}^{\infty} \hat{p}^m_{\theta,f}\, e(i)$$

Im folgenden sei $\nu_n := \tau_n(H)$, $n \geq 0$.

Lemma 5.2

Unter (L_1) gilt für $\zeta = (\theta,f) \in \Theta \times F$ und $i \in I$

(a) $|\bar{r}_\zeta(i)| + \bar{t}_\zeta(i) + \bar{m}_\zeta(i) \leq y_1(\theta,i)$
und unter (T): $0 < \eta \leq \bar{t}_\zeta(i) < \infty$.

(b) $\bar{r}_\zeta(i) = E_\zeta\left[\sum_{m=0}^{\nu_1-1} r_\zeta(X_m) | X_0 = i\right]$

$\bar{t}_\zeta(i) = E_\zeta\left[\sum_{m=0}^{\nu_1-1} t_\zeta(X_m) | X_0 = i\right]$

$\bar{m}_\zeta(i) = E_\zeta[\nu_1 | X_0 = i]$

und für $i \in H$, $n \geq 0$

$$\bar{r}_\zeta(i) = E_\zeta\Big[\sum_{m=\nu_n}^{\nu_{n+1}-1} r_\zeta(X_m) | X_{\nu_n} = i\Big]$$

$$\bar{t}_\zeta(i) = E_\zeta\Big[\sum_{m=\nu_n}^{\nu_{n+1}-1} t_\zeta(X_m) | X_{\nu_n} = i\Big]$$

$$\bar{m}_\zeta(i) = E_\zeta[\nu_{n+1} - \nu_n | X_{\nu_n} = i]$$

Beweis:

(a) $|\bar{r}_\zeta(i)| + \bar{t}_\zeta(i) + \bar{m}_\zeta(i)$

$$= \Big|\sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}_\zeta^m r_\zeta(i)\Big| + \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}_\zeta^m t_\zeta(i) + \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}_\zeta^m e(i)$$

$$\leq y_1(\theta, i) \quad \text{wie in Satz 4.2 aus } (L_1),$$

und unter (T):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}_\zeta^m t_\zeta(i) \geq \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}_\zeta^m(\eta \cdot e)(i) \geq \eta > 0.$$

(b) $E_\zeta\Big[\sum_{m=0}^{\nu_1-1} r_\zeta(X_m) | X_0 = i\Big]$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} E_\zeta[X_{\{\nu_1 > m\}} r_\zeta(X_m) | X_0 = i]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j \in I} P_\zeta[X_m = j,\ \nu_1 > m | X_0 = i] r_\zeta(j)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}_\zeta^m r_\zeta(i) \quad \text{ebenso für } t_\zeta \text{ und } e.$$

Aus der starken Markoff-Eigenschaft folgt für $i \in H$

$$E_\zeta\Big[\sum_{m=\nu_n}^{\nu_{n+1}-1} r_\zeta(X_m) | X_{\nu_n} = i\Big]$$

$$= E_\zeta\Big[\sum_{m=\nu_0}^{\nu_1-1} r_\zeta(X_m) | X_0 = i\Big]$$

$= \bar{r}_\zeta(i)$. Ebenso für t_ζ und e.

$\bar{r}_\zeta$ bzw. $\bar{t}_\zeta$ repräsentieren den erwarteten "Einschritt"-Gewinn bzw. die Verweildauer des eingebetteten Prozesses, bei dem ein "Schritt" (gemessen in der diskreten Zeit von (X_m)) bis zum nächsten Eintritt nach H dauert. Diese erwartete Schrittlänge gemessen in der diskreten Zeit von (X_m) ist $\bar{m}_\zeta(\cdot)$.

Im nächsten Lemma wird der erwartete Gewinn (bzw. die diskrete und kontinuierliche Zeit) bis zum ersten Eintritt in einen Zustand $s \in H$ durch Größen des eingebetteten Prozesses ausgedrückt.
Dazu werden folgende Definitionen benötigt:

$$ {}_s\bar{Q}_\zeta(i,j) := \begin{cases} \bar{Q}_\zeta(i,j) & j \neq s \\ 0 & j = s \end{cases} , \quad i,j,s \in H. $$

$$ \bar{\tau}_1(s) := \inf \{m > 0 | \bar{X}_m = s\} \text{ für } s \in H \quad . $$

Lemma 5.3

Unter (L_1) gilt für $\theta \in \Theta$, $f \in F$, $i \in I$ und $s \in H$ (mit $\zeta = (\theta,f)$):

(a) $$ E_\zeta\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(s)-1} |r_\zeta(X_m)| \,\middle|\, X_0 = i \right] $$

$$ = \overline{|r_\zeta|}(i) + \sum_{h \in H \setminus \{s\}} Q_\zeta(i,h) \sum_{m=0}^{\infty} {}_s\bar{Q}_\zeta^m \overline{|r_\zeta|}(h) $$

(entsprechend für t_ζ und $\overline{t_\zeta}$) und

$$ E_\zeta[\tau_1(s) | X_0 = i] $$

$$ = \bar{m}_\zeta(i) + \sum_{h \in H \setminus \{s\}} Q_\zeta(i,h) \sum_{m=0}^{\infty} {}_s\bar{Q}_\zeta^m \bar{m}_\zeta(h) $$

(b) Für $i \in H$ gilt, falls einer der Ausdrücke existiert

$$ E_\zeta\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(s)-1} r_\zeta(X_m) \,\middle|\, X_0 = i \right] $$

$$ = E_\zeta\left[\sum_{m=0}^{\bar{\tau}_1(s)-1} \bar{r}_\zeta(\bar{X}_m) \,\middle|\, \bar{X}_0 = i \right] $$

(entsprechend für t_ζ) und

$$E_\zeta[\tau_1(s)|X_0 = i]$$

$$= E_\zeta\Big[\sum_{m=0}^{\bar\tau_1(s)-1} \bar m_\zeta(\bar X_m)|\bar X_0 = i\Big]$$

Beweis:

Es sei $\zeta \in \mathfrak{Z}$, $i \in I$, $s \in H$ fest. $\nu_n := \tau_n(H)$, $n \geq 0$

(a) 1. Aus Lemma 5.2 (b) folgt für $n \geq 0$

$$E_\zeta\Big[\sum_{m=\nu_n}^{\nu_{n+1}-1} |r_\zeta(X_m)|\,|X_{\nu_n}, X_{\nu_{n-1}}, \ldots, X_0\Big]$$

$$= \overline{|r_\zeta|}(X_{\nu_n})$$

$$2.\ E_\zeta\Big[\sum_{m=0}^{\tau_1(s)-1} |r_\zeta|(X_m)|X_0 = i\Big]$$

$$= E_\zeta\Big[\sum_{m=0}^{\infty} |r_\zeta|(X_m)\chi_{\{\tau_1(s)>m\}}|X_0 = i\Big]$$

$$= E_\zeta\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=\nu_n}^{\nu_{n+1}-1} |r_\zeta|(X_m)\chi_{\{\tau_1(s)>m\}}|\ X_0 = i\Big]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_\zeta\Big[\sum_{m=\nu_n}^{\nu_{n+1}-1} |r_\zeta|(X_m)\chi_{\{\tau_1(s)>\nu_n\}}|X_0 = i\Big]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_\zeta\Big[\chi_{\{\tau_1(s)>\nu_n\}} E_\zeta\Big[\sum_{m=\nu_n}^{\nu_{n+1}-1} |r_\zeta|(X_m)|X_{\nu_n}, \ldots, X_0\Big]|X_0 = i\Big]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_\zeta[\chi_{\{\tau_1(s)>\nu_n\}}\overline{|r_\zeta|}(X_{\nu_n})|X_0 = i]$$

$$= \overline{|r_\zeta|}(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h\in H} E_\zeta[X_{\{\tau_1(s)>\nu_n\}} \overline{|r_\zeta|}(X_{\nu_n}) | X_{\nu_1} = h] \cdot P_\zeta[X_{\nu_1} = h | X_0 = i$$

$$= \overline{|r_\zeta|}(i) + \sum_{h\in H\setminus\{s\}} Q_\zeta(i,h) \sum_{n=1}^{\infty} E_\zeta[X_{\{\bar\tau_1(s)>n\}} \overline{|r_\zeta|}(\bar X_n) | \bar X_1 = h]$$

$$= \overline{|r_\zeta|}(i) + \sum_{h\in H\setminus\{s\}} Q_\zeta(i,h) \sum_{n=0}^{\infty} E_\zeta[X_{\{\bar\tau_1(s)>n\}} \overline{|r_\zeta|}(\bar X_n) | \bar X_0 = h]$$

$$= \overline{|r_\zeta|}(i) + \sum_{h\in H\setminus\{s\}} Q_\zeta(i,h) \sum_{n=0}^{\infty} {}_s\bar Q_\zeta^n \, \overline{|r_\zeta|}(h)$$

da ${}_s\bar Q_\zeta^n(i,j) = P_\zeta[\bar X_n = j, \bar\tau_1(s) > n | \bar X_0 = i]$.

Ebenso folgt die Aussage für t_ζ und $\overline{t_\zeta}$ bzw. e und $\overline{m_\zeta}$.

(b) Aus (a) folgt für $i \in H$

$$E_\zeta\Big[\sum_{m=0}^{\tau_1(s)-1} r_\zeta^{\pm}(X_m) | X_0 = i\Big]$$

$$= \overline{r_\zeta^{\pm}}(i) + \sum_{h\in H\setminus\{s\}} \bar Q_\zeta(i,h) \sum_{n=0}^{\infty} {}_s\bar Q_\zeta^n \, \overline{r_\zeta^{\pm}}(h)$$

$$= \overline{r_\zeta^{\pm}}(i) + \sum_{n=1}^{\infty} {}_s\bar Q_\zeta^n \, \overline{r_\zeta^{\pm}}(i)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} {}_s\bar Q_\zeta^n \, \overline{r_\zeta^{\pm}}(i)$$

$$= E_\zeta\Big[\sum_{m=0}^{\bar\tau_1(s)-1} \overline{r_\zeta^{\pm}}(\bar X_m) | \bar X_0 = i\Big].$$

Die Behauptung (b) folgt dann, falls einer der Ausdrücke für r_ζ^+ oder r_ζ^- endlich ist, da gilt

$$\overline{r_\zeta^+}(i) - \overline{r_\zeta^-}(i) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat P_\zeta^m \, r_\zeta^+(i) - \sum_{m=0}^{\infty} \hat P_\zeta^m \, r_\zeta^-(i)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \hat P_\zeta^m \, r_\zeta(i) = \bar r_\zeta(i) \le y_1(\theta,i) < \infty \quad .$$

Ebenso folgt die Aussage für t_ζ und θ.

Das nächste Lemma zeigt, daß beim Übergang zu $(\bar{X}_m)$ die Klassenstruktur der Markoff-Kette bleibt, falls in (X_m) gilt:

(I_1): $\forall \zeta \in \mathfrak{Z}$ $((X_m), P_\zeta)$ besitzt keine zwei disjunkten abgeschlossenen Klassen.

Lemma 5.4

Unter (L_1), (I_1) gilt:

(a) $\forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad ((\bar{X}_m), \bar{Q}_{\theta,f})$ besitzt keine zwei disjunkten, abgeschlossenen Klassen;

(b) $\forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad ((\bar{X}_m), \bar{Q}_{\theta,f})$ besitzt genau eine positiv rekurrente Klasse (und evtl. transiente Zustände).

Beweis:

(a) [7], Theorem 2.2 (a).

(b) folgt aus (a), da jede endliche Markoff-Kette mindestens eine positiv rekurrente Klasse hat. □

Satz 5.5

(a) Unter (L_1) gilt für $j \in H$, $\zeta \in \mathfrak{Z}$
j positiv rekurrent unter $P_\zeta \Leftrightarrow j$ positiv rekurrent unter $\bar{Q}_\zeta$, und
j rekurrent unter $P_\zeta \Leftrightarrow j$ rekurrent unter $\bar{Q}_\zeta$.

(b) Unter $(L_1), (I_1)$ gilt für $\theta \in \Theta$, $f \in F$
$((X_m), P_{\theta,f})$ besitzt genau eine positiv rekurrente Klasse (und evtl. transiente Zustände).

Beweis:

(a) Aus (L_1) folgt: $e \leq \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}_\zeta^m e = \overline{m_\zeta} \leq y_1(\theta, \cdot)$.

Daher
j positiv rekurrent unter P_ζ
$\Rightarrow E_\zeta[\tau_1(j) | X_0 = j] < \infty$

$$\Rightarrow E_\zeta\left[\sum_{m=0}^{\bar{\tau}_1(j)-1} \bar{m}_\zeta(X_m) | X_0 = j\right] < \infty \qquad (5.3\ (b))$$

$$\Rightarrow E_\zeta[\bar{\tau}_1(j)|\bar{X}_0 = j] \leq E_\zeta\Big[\sum_{m=0}^{\bar{\tau}_1(j)-1} \bar{m}_\zeta(X_m)|X_0 = j\Big] < \infty$$

$\Rightarrow$ j positiv rekurrent unter $\bar{Q}_\zeta$

$$\Rightarrow E_\zeta[\bar{\tau}_1(j)|\bar{X}_0 = j] < \infty$$

$$\Rightarrow E_\zeta[\tau_1(j)|X_0 = j] = \sum_{m=0}^{\infty} j\bar{Q}_\zeta^m \bar{m}_\zeta(j) \quad (5.3\ (b))$$

$$\leq \max_{h\in H} y_1(\theta,h) \sum_{m=0}^{\infty} j\bar{Q}_\zeta^m \bar{e}(j)$$

$$\leq \max_{h\in H} y_1(\theta,h)\ E_\zeta[\bar{\tau}_1(j)|\bar{X}_0 = j] < \infty$$

mit $\bar{e} := e_{|H}$

$\Rightarrow$ j positiv rekurrent unter P_ζ.

Ebenso folgt aus $\bar{\tau}_1(j) \leq \tau_1(j)$

j rekurrent unter P_ζ

$$\Rightarrow P_\zeta[\tau_1(j) < \infty|X_0 = i] = 1$$

$$\Rightarrow P_\zeta[\bar{\tau}_1(j) < \infty|\bar{X}_0 = j] = 1$$

$\Rightarrow$ j rekurrent unter $\bar{Q}_\zeta$

$$\Rightarrow \bar{Q}_\zeta[\bar{\tau}_1(j) < \infty|\bar{X}_0 = j] = 1$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_\zeta[\tau_m(H) = n,\ X_n = j,\ X_\nu \neq j,\ 0 < \nu < n|X_0 = j]$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} P_\zeta[X_n = j,\ X_\nu \neq j,\ 0 < \nu < n|X_0 = j]$$

$$= P_\zeta[\tau_1(j) < \infty|X_0 = j]$$

$\Rightarrow$ j rekurrent unter P_ζ.

(b) folgt aus (a) und Lemma 5.4 (b).

Bemerkung

Aus Satz 5.5 folgt, da in endlichen Markoff-Ketten "rekurrent" und "positiv rekurrent" äquivalent sind,

j positiv rekurrent unter P_ζ

$\Leftrightarrow$

j rekurrent unter P_ζ
für alle $j \in H$ und $\zeta \in \mathfrak{Z}$.

Sind in dem ursprünglichen Prozeß (X_m) die Größen $q_\theta(j|i,f(i))$, $r_{\theta,f}(i)$ und $t_{\theta,f}(i)$ stetig in (θ,f), so übertragen sich diese Eigenschaften auf die entsprechenden Größen des eingebetteten Prozesses $(\bar{X}_m)$ unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen:

(L_3) $(\theta,f) \to P_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i)$ stetig

(L_4) $\hat{P}^n_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gleichmäßig in (θ,f)

und $\sup_{\theta\in\Theta} y_1(\theta,i) < \infty$; das folgt z.B. aus

(L_2) $\theta \to y_1(\theta,i)$ stetig und

(C_3) Θ kompakt.

Wird nur die Stetigkeit in $f \in F$ bei festem $\theta \in \Theta$ betrachtet, so genügt in (L_3) die Stetigkeit in f, d.h. (L_3') ; (L_2) und (C_3) sind überflüssig. Genauer gilt:

Satz 5.6

(a) Unter $(C_2'),(L_{1,3'})$ gilt für $\theta \in \Theta$, $i \in I$, $h \in H$:

$f \to Q_{\theta,f}(i,h)$ stetig

(b) Unter $(C_{1,2'}),(L_{1,3',4'})$ gilt für $i,j \in I$ und $\theta \in \Theta$:

$f \to Q_{\theta,f}(i,j)$, $\bar{r}_{\theta,f}(i)$, $\bar{t}_{\theta,f}(i)$, $\bar{m}_{\theta,f}(i)$ stetig

(c) Unter $(C_{2,3}),(L_{1-3})$ gilt für $i \in I$, $h \in H$:

$(\theta,f) \to Q_{\theta,f}(i,h)$ stetig

(d) Unter $(C_2),(L_{1-4})$ gilt für $i,j \in I$

$(\theta,f) \to Q_{\theta,f}(i,j)$, $\bar{r}_{\theta,f}(i)$, $\bar{t}_{\theta,f}(i)$, $\bar{m}_{\theta,f}(i)$ stetig

Zum Beweis benötigt man

Lemma 5.7

Gilt (L_1) und $\forall i \in I \ \sup_{\theta\in\Theta} y_1(\theta,i) < \infty$, so folgt

$$\forall i \in I \quad \hat{P}^m_\zeta e(i) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \text{gleichmäßig in } \zeta \in \mathfrak{Z}$$

Beweis zu Lemma 5.7:

(vgl. [7], Theorem 2.2 (b)).

Annahme: Die Behauptung ist falsch;

dann gilt für ein $i \in I$ mit

$\hat{P}^m_\zeta e(i) = P_\zeta[\tau_1(H) > m | X_0 = i]$:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists \zeta_N \in \mathfrak{Z} \quad P_{\zeta_N}[\tau_1(H) > N | X_0 = i] \geq \varepsilon$$

und damit

$$\forall m \leq N \quad P_{\zeta_N}[\tau_1(H) > m | X_0 = i] \geq \varepsilon \ .$$

Aus Satz 4.2 folgt mit $\zeta_N = (\theta_N, f_N)$

$$\begin{aligned} \infty > \sup_{\theta\in\Theta} y_1(\theta,i) &\geq y_1(\theta_N,i) \\ &\geq E_{\zeta_N}[\tau_1(H) | X_0 = i] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P_\zeta[\tau_1(H) > m | X_0 = i] \\ &\geq \sum_{m=0}^{N} P_\zeta[\tau_1(H) > m | X_0 = i] \\ &\geq N \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Für $N > \sup_{\theta\in\Theta} y_1(\theta,i) \cdot \frac{1}{\varepsilon}$ folgt ein Widerspruch.

Beweis zu Satz 5.6:

Für $u_{\theta,f}(k) := r_{\theta,f}(k)$, $t_{\theta,f}(k)$, $P_{\theta,f}(k,j)$, 1 $(k \in I)$ gilt: $|u_\zeta(k)| \leq y_1(\theta,k)$, und daher mit Satz 2.3 aus (C_2), $(L_{1\text{-}3})$ (bzw. (C_2'), $(L_{1,3'})$ für $n \geq 0$, $i,j \in I$ zunächst: $(\theta,f) \to \hat{P}^n_{\theta,f}(i,j)$ stetig (bzw. $f \to \hat{P}^n_{\theta,f}(i,j)$ stetig), und daraus: $(\theta,f) \to \hat{P}^n_{\theta,f}\, u_{\theta,f}(i)$ stetig (bzw. $f \to \hat{P}_{\theta,f} u_{\theta,f}(i)$ stetig).

Zu zeigen bleibt also jeweils:

$$(*) \qquad \sum_{m=N}^{\infty} \hat{P}^m_\zeta\, u_\zeta(i) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \text{gleichmäßig in } \zeta \in \mathfrak{Z} \quad (\text{bzw. } f \in F),$$

dann ergeben sich die betrachteten Größen $\bar{r}_\zeta$, $\bar{t}_\zeta$, $\bar{m}_\zeta$ und $\bar{Q}_\zeta$ als gleichmäßige Limites stetiger Größen und sind daher stetig.

(a) Wie im Lemma 5.7 folgt bei festem $\theta \in \Theta$ aus (L_1):

$$\hat{P}^n_{\theta,f}\, e(i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{gleichmäßig in } f \in F, \text{ daher}$$

$$\sum_{m=N}^{\infty} \hat{P}^m_\zeta\, P_\zeta(i,h) = \sum_{k\in I} \hat{P}^N_\zeta(i,k) \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_\zeta\, P_\zeta(k,h)$$

$$= \sum_{k\in I} \hat{P}^N_\zeta(i,k) P_\zeta[X_{\tau_1(H)} = h \mid X_0 = k]$$

$$\leq \sum_{k\in I} \hat{P}^N_\zeta(i,k) = \hat{P}^N_\zeta\, e(i) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

gleichmäßig in $f \in F$, d.h. $(*)$ ist erfüllt.

(b) Aus Satz 2.4 (a) folgt unter den angegebenen Voraussetzungen

$\hat{P}^n_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gleichmäßig in $f \in F$ für festes $\theta \in \Theta$, $i \in I$.

Aus (L_1) folgt für u_ζ wahlweise wie oben:

$$\sum_{m=N}^{\infty} \hat{P}^m_\zeta\, u_\zeta(i) = \hat{P}^N_\zeta \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_\zeta\, u_\zeta(i)$$

$$\leq P^N_\zeta\, y_1(\theta,\cdot)(i) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \text{gleichmäßig in } f \in F, \text{ d.h. } (*) \text{ ist erfüllt.}$$

(c) Folgt wie (a) aus Lemma 5.7

(d) Wie in (6) wird (*) aus (L_4) gefolgert.

Sei $\bar{e}$ die Einschränkung von e auf H, d.h.

$$\bar{e}: H \to \mathbb{R}^1, \; e(h) \equiv 1$$

dann definiert man mit Hilfe der Tabu-Wahrscheinlichkeit ${}_s\bar{Q}_\zeta(i,j)$ für $i,j,s \in H$:

$$\bar{\mu}_{i,s}(\theta,f) := \sum_{m=0}^{\infty} {}_s\bar{Q}^m_{\theta,f}\, \bar{e}(i)$$

$\bar{\mu}_{i,s}(\zeta)$ beschreibt die erwartete Anzahl von Eintritten des Prozesses X_m in die Menge H bei Start in i bevor der Zustand s erreicht wird. Das ist aber gerade die erwartete diskrete Rückkehrzeit des Prozesses $\bar{X}_m$ in den Zustand s bei Start in i:

Satz 5.8

(a) Unter (L_1) gilt für $i,s \in H$, $f \in F$ und $\theta \in \Theta$

$$\bar{\mu}_{i,s}(\theta,f) = E_{\theta,f}[\bar{\tau}_1(s) | \bar{X}_0 = i]$$

(b) Unter $(C_{1,2'}),(L_{1,3'}),(I_1)$ gilt:

$$\forall\theta \in \Theta \quad \exists M_\theta \in \mathbb{R}^1 \quad \forall f \in F \quad \exists s = s_{\theta,f} \in H \quad \forall i \in H$$
$$\bar{\mu}_{i,s}(\theta,f) \le M_\theta < \infty$$

(c) Unter $(C_{1-3}),(L_{1-3}),(I_1)$ gilt

$$\exists M \in \mathbb{R}^1 \quad \forall\theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad \exists s = s_{\theta,f} \in H \quad \forall i \in H$$

$$\bar{\mu}_{i,s}(\theta,f) \le M < \infty.$$

Beweis:

(a) $E_\zeta[\bar{\tau}_1(s) | X_0 = i] = \sum_{m=0}^{\infty} P_\zeta[\bar{\tau}_1(s) > m | X_0 = i] = \sum_{m=0}^{\infty} {}_s\bar{Q}_\zeta\, \bar{e}(i)$

(b) folgt aus [6] Theorem 2.6, denn
nach Satz 5.6 (a) gilt $f \to \bar{Q}_{\theta,f}(i,j)$ stetig
aus (C_1) folgt F kompakt
und wegen der Endlichkeit von H ist Bedingung (C_3) aus [6] erfüllt,
die unter (I_1) die Behauptung impliziert.

(c) folgt wie (b) aus Satz 5.6 (a) und der Kompaktheit von $\Theta \times F$.

□

6. Ergodensätze unter Ljapunoff-Bedingungen

In diesem Abschnitt wird eine Darstellung des erwarteten Durchschnittsgewinns $W(\theta,f)$ für $f \in F$ mit Hilfe eines Ergodensatzes für Markoff-Ketten angegeben. Dabei werden die Resultate über den eingebetteten Prozeß $\tilde{X}_m$ aus dem letzten Abschnitt benutzt. Damit kann der Durchschnittsgewinn $W(\theta,f)$ aus dem ursprünglichen Prozeß dargestellt werden als Durchschnittsgewinn $\tilde{W}(\theta,f)$ aus dem eingebetteten Prozeß.

Die Darstellung von $W(\theta,f)$ ist auch für das Kriterium $R(\theta)$ von Bedeutung, wie der erste Satz zeigt. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Ergodensatzes von Chung [4] auf den Fall einer positiv rekurrenten Klasse mit transienten Zuständen, wie er sich unter den Ljapunoff-Bedingungen ergibt. (In [4] sind keine transienten Zustände berücksichtigt).

Im folgenden Satz wird das Modell mit festem $\zeta \in \mathfrak{Z}$ und $H = \{i^*\}$ betrachtet. Die folgenden Lemmata und Sätze zeigen dann, daß sich zu jedem $\zeta \in \mathfrak{Z}$ ein $s_\zeta \in I$ finden läßt, daß die Voraussetzungen von Satz 6.1 erfüllt.

Satz 6.1

Es sei $(\theta,f) \in \Theta \times F$ fest.

Für $i^* \in I$ sei $\tilde{P}_\zeta(i,j) = \begin{cases} P_\zeta(i,j) & j \neq i^* \\ 0 & j = i^* \end{cases}$, $i,j \in I$.

Es sei $u: I \to \mathbb{R}^1$ und

$$(1)\ \forall i \in I \quad E_{\theta,f}\left[\tau_1(i^*) \middle| X_0 = i\right] < \infty$$

$$(2)\ \forall i \in I \quad E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(i^*)-1} |u(X_m)| \middle| X_0 = i\right] < \infty$$

Dann gilt:

(a) I besteht aus einer nicht-leeren, positiv rekurrenten Klasse und evtl. transienten Zuständen. i^* ist positiv rekurrent.

(b) $\forall i \in I$

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} u(X_m)$$

$$= \sum_{j \in I} \pi_{\theta,f}(j)u(j)$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{P}^m_{\theta,f}\, u(i^*)}{\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{P}^m_{\theta,f}\, e(i^*)} \qquad (P^i_{\theta,f}\text{ - f.s.}).$$

(c) $\forall i \in I$

$$\lim_N E_{\theta,f}\left[\left|\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} u(X_m) - \sum_{j \in I} \pi_{\theta,f}(j)u(j)\right| \,\middle|\, X_0 = i\right] = 0$$

Dabei sei $\tilde{\ }_{\theta,f}(\cdot)$ die nach (a) eindeutig existierende stationäre Verteilung.

Bemerkung

1. Aus (c) folgt insbesondere

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,f}[u(X_m) | X_0 = i]$$

$$= \sum_{j \in I} \pi_{\theta,f}(j)u(j)$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{P}^m_{\theta,f}\, u(i^*)}{\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{P}^m_{\theta,f}\, e(i^*)}$$

und dieser Ausdruck ist vom Anfangszustand i unabhängig.

2. Im Spezialfall $H = \{i^*\}$ für ein $i^* \in I$ (H aus (L_1)) gilt offensichtlich unter (L_1) mit Satz 4.2 $\forall\theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad \forall i \in I$

$$E_{\theta,f}\left[\tau_1(i^*)\middle|X_0 = i\right] < \infty \quad ,$$

$$E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(i^*)-1} \left|r_{\theta,f}(X_m)\right|\middle|X_0 = i\right] < \infty$$

und $$E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(i^*)-1} t_{\theta,f}(X_m)\middle|X_0 = i\right] < \infty.$$

D.h. i^* ist positiv rekurrent, es gilt (I_1) und die Darstellung aus 6.1 (b)

Beweis:

In diesem Beweis werden die Parameter (θ,f) unterdrückt. Sei $i \in I$ fester Anfangszustand.

(a) Aus (1) folgt unmittelbar, daß i^* positiv rekurrent ist, (z.B. Chung [4], S. 31). Ebenso kann es keine zwei abgeschlossenen,disjunkten Klassen geben, da i^* in jeder abgeschlossenen Klasse liegt.

(b) 1. Zur Anwendung der entsprechenden Sätze aus [4] beachte man, daß gilt (mit der Notation von [4], S. 46) :

$$i^*p^*_{i^*j} = \sum_{m=1}^{\infty} P[X_m = j,\ X_\nu \neq i^*,\ 0 < \nu < m | X_0 = i^*]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{p}^{m-1}\, p(i^*,j)$$

$$= \frac{\pi(j)}{\pi(i^*)} \qquad \text{([4], S. 51)}$$

und allgemein für $v: I \to \mathbb{R}^1_+$

$$\sum_{j\in I} i^*p^*_{i^*j}\, v(j) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{p}^m P\, v(i^*)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{P}^m v(i^\infty) \qquad \text{([15], 5.4 Lemma)}$$

$$= \frac{1}{\pi(i^*)} \sum_{j \in I} \pi(j) v(j)$$

2. Es gilt also

$$\sum_{j \in I} \pi(j) |u(j)|$$

$$= \pi(i^*) \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{P}^m |u|(i^*)$$

$$= \pi(i^*) E\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(i^*)-1} |u(X_m)| \,\middle|\, X_0 = i^* \right]$$

$$< \infty$$

3. Es sei $\nu := \tau_1(i^*)$, dann gilt

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} u(X_m)$$

$$= \lim_N \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} u(X_m) \chi_{\{\nu > m\}} + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} u(X_m) \chi_{\{\nu \leq m\}} \right\} .$$

3.1 Für den ersten Summanden gilt:

aus $P[\nu < \infty | X_0 = i] = 1$ folgt

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |u(X_m)| \chi_{\{\nu > m\}}$$

$$\leq \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\nu-1} |u(X_m)|$$

$$= 0 \quad (P^i - \text{f.s.}) .$$

3.2 Für die Verteilung des zweiten Summanden gilt für $\alpha \in \mathbb{R}^1$

$$P\left[\overline{\lim_N}\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}u(X_m)\chi_{\{\nu\le m\}} \le \alpha | X_0 = i\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\overline{\lim_N}\frac{1}{N}\sum_{m=\nu}^{N-1}u(X_m) \le \alpha | X_0 = i,\ X_\nu = i^*, \nu = n\right] \cdot P[\nu = n | X_0 = i$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\overline{\lim_N}\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-n-1}u(X_{m+n}) \le \alpha | X_n = i^*\right] \cdot P\left[\nu = n | X_0 = i\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\overline{\lim_N}\frac{1}{N-n}\sum_{m=0}^{N-n-1}u(X_m) \le \alpha | X_0 = i^*\right] \cdot P\left[\nu = n | X_0 = i\right]$$

$$= P\left[\overline{\lim_N}\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}u(X_m) \le \alpha | X_0 = i^*\right] \cdot P\left[\nu < \infty | X_0 = i\right]$$

$$= P\left[\overline{\lim_N}\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}u(X_m) \le \alpha | X_0 = i^*\right],$$

ebenso folgt die Gleichung für $\underline{\lim}$ anstelle von $\overline{\lim}$.

3.3 Für $X_0 = i^*$ bewegt sich (X_m) nur in der Klasse der positiv rekurrent Zustände, es liegt also die Situation des Ergodensatzes von Chung ([4], Theorem 15.2) vor, und es gilt

$$\lim_N \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}u(X_m) = \sum_{j\in I}\pi(j)u(j) \qquad (P[\cdot\, X_0 = i^*] - \text{f.s.}) .$$

Mit 3.2 folgt daraus

$$\lim_N \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}u(X_m)\chi_{\{\nu\le m\}} = \sum_{j\in I}\pi(j)u(j) \qquad (P[\cdot | X_0 = i] - \text{f.s.}),$$

und daher mit 3.1

$$\lim_N \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}u(X_m) = \sum_{j\in I}\pi(j)u(j) \qquad (P[\cdot | X_0 = i] - \text{f.s.}) .$$

4. Mit 1. folgt sofort

$$\sum_{j\in I} \pi(j)u(j) = \frac{\frac{1}{\pi(i^*)} \sum_{j\in I} \pi(j)u(j)}{\frac{1}{\pi(i^*)} \sum_{j\in I} \pi(j) \cdot 1}$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{P}^m u(i^*)}{\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{P}^m e(i^*)}$$

Damit ist (b) vollständig bewiesen.

(c) Wird ähnlich wie (b) durch Rückführung auf den entsprechenden Satz von Chung für positiv rekurrente Markoff-Ketten ([4] Theorem 15.3) bewiesen. Dazu sei $\rho := \sum_{j\in I} \pi(j)u(j)$, dann gilt

$$\overline{\lim_N} E\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u(X_m) - \rho\right| \middle| X_0 = i\right]$$

$$\leq \overline{\lim_N} E\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u(X_m)\chi_{\{m<\nu\}}\right| \middle| X_0 = i\right] + \overline{\lim_N} E\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u(X_m)\chi_{\{m\geq\nu\}} - \rho\right| \middle| X_0 = i\right]$$

$$= \overline{\lim_N} E\left[E\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u(X_m) - \rho\right| \middle| X_\nu, \nu\right] \middle| X_0 = i\right]$$

$$= \overline{\lim_N} \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\left|\frac{1}{N-n}\sum_{m=0}^{N-n-1} u(X_{m+n}) - \rho\right| \middle| X_n = i^*, \nu = n\right] \cdot P[X_\nu = i^*, \nu = n | X_0 = i]$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lim_N} E\left[\left|\frac{1}{N-n}\sum_{m=0}^{N-n-1} u(X_m) - \rho\right| \middle| X_0 = i^*\right] \cdot P[\nu = n | X_0 = i]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot P[\nu = n | X_0 = i]$$

$$= 0$$

Dabei wurde benutzt

$$\overline{\lim_N} \frac{1}{N} E\left[\left|\sum_{m=0}^{N-1} u(X_m)\chi_{\{m<\nu\}}\right| \middle| X_0 = i\right] \leq$$

$$\leq \overline{\lim_N} \frac{1}{N} E\left[\sum_{m=0}^{\nu-1} |u(X_m)| \,\middle|\, X_0 = i\right] = 0 \quad \text{(Voraussetzung (2))},$$

und daß sich der Prozeß (X_m) bei Start in i^* nur in der positiv rekurrenten Klasse aufhält, so daß mit [4] Theorem 15.3 folgt

$$\lim_N E\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u(X_m) - \rho\right| X_0 = i^*\right] = 0$$

Im folgenden Lemma wird gezeigt, daß die Voraussetzungen aus Satz 6.1 unter (L_1) (I_1) für jedes feste $\theta \in \Theta$ und $f \in F$ erfüllt sind. Darüberhinaus wird gezeigt, die betrachteten Ausdrücke gleichmäßig in $f \in F$ beschränkt sind, dabei wird die Aussage von Satz 5.8 über die gleichmäßige Beschränktheit der Rückkehrzeiten in geeignete Zustände ausgenutzt.
Diese zweite Folgerung wird in Abschnitt 8 zur Herleitung der Optimalitätsgleichung benutzt.

Lemma 6.2

(a) Unter (L_1),(I_1) gilt

$$\forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad \exists s = s_{\theta,f} \in H \quad \forall i \in I$$

$$E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(s)-1} |r_{\theta,f}(X_m)| \,\middle|\, X_0 = i\right] < \infty \ ,$$

$$E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(s)-1} t_{\theta,f}(X_m) \,\middle|\, X_0 = i\right] < \infty \text{ und}$$

$$E_{\theta,f}[\tau_1(s) | X_0 = i] < \infty \ .$$

(b) Unter $(C_{1,2'})$,$(L_{1,3'})$, (I_1) gilt

$$\forall \theta \in \Theta \ \exists M'_\theta \in \mathbb{R}^1 \quad \forall f \in F \quad \exists s = s_{\theta,f} \in H \quad \forall i \in I$$

$$\sup_{f\in F} E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(s)-1} |r_{\theta,f}(X_m)| \,\middle|\, X_0 = i\right] \leq y_1(\theta,i) + M'_\theta < \infty \ ,$$

entsprechend für $t_{\theta,f}$ und $\sup_{f\in F} E_{\theta,f}[\tau_1(s) | X_0 = i] < \infty$.

Beweis:

(a) 1. Nach Lemma 5.4 (b) besitzt $((\bar{X}_m), \bar{Q}_\zeta)$ unter den angegebenen Bedingungen genau eine positiv rekurrente Klasse, daher folgt für die $\bar{Q}_\zeta$-Rückkehrzeiten $\bar{\mu}_{i,s}(\theta,f)$:

$$\forall \zeta \in \mathfrak{Z} \qquad \exists s \in H \quad \forall h \in H \qquad \bar{\mu}_{h,s}(\zeta) < \infty$$

$$\text{und damit } \mu(s,\zeta) := \max_{h\in H} \bar{\mu}_{h,s}(\zeta) < \infty \ .$$

2. Mit Lemma 5.2 (a) und 5.3 (a) folgt

$$E_\zeta \left[\sum_{m=0}^{\tau_1(s)-1} |r_\zeta(X_m)| \,\middle|\, X_0 = i \right]$$

$$= \overline{|r_\zeta|}\,(i) + \sum_{h\in H\setminus\{s\}} Q_\zeta(i,h) \sum_{m=0}^{\infty} {}_s\bar{Q}_\zeta^m\, \overline{|r_\zeta|}\,(h)$$

$$\leq y_1(\theta,i) + \sum_{h\in H\setminus\{s\}} Q_\zeta(i,h) \max_{j\in H} y_1(\theta,j) \sum_{m=0}^{\infty} {}_s\bar{Q}_\zeta^m\, \bar{e}(h)$$

$$\leq y_1(\theta,i) + \sum_{h\in H\setminus\{s\}} Q_\zeta(i,h) \max_{j\in H} y_1(\theta,j)\, \mu(s,\zeta)$$

$$\leq y_1(\theta,i) + \max_{j\in H} y_1(\theta,j)\, \mu(s,\zeta) < \infty \ .$$

Ebenso für $t_{\theta,f}$ und e.

(b) Nach Satz 5.8 (b) gilt

$$\forall \theta \in \Theta \quad \exists M_\theta \in \mathbb{R}^1 \quad \forall f \in F \quad \exists s = s_{\theta,f} \in H \quad \forall h \in H$$

$$\bar{\mu}_{h,s}(\theta,f) \leq M_\theta < \infty$$

d.h. $\mu(s,\theta) := \sup_{f\in F} \max_{h\in H} \bar{\mu}_{h,s}(\theta,f) \leq M_\theta < \infty$. Damit folgt wie in (a) für alle $f \in F$

$$E_{\theta,f} \left[\sum_{m=0}^{\tau_1(s)-1} |r_{\theta,f}(X_m)| \,\middle|\, X_0 = i \right] \leq$$

$$\leq y_1(\theta,i) + \max_{j\in H} y_1(\theta,j)\mu(s,\theta) \leq y_1(\theta,i) + M'_\theta < \infty$$

$$\text{mit} \quad M' := \max_{j\in H} y_1(\theta,j) \cdot M_\theta$$

Entsprechend für $t_{\theta,f}$ und e.

Mit ${}_s\tilde{P}_{\theta,f}(i,j) := P_{\theta,f}(i,j)\chi_{\{j\neq s\}}$ ergibt sich als Korollar aus Satz 6.1 und !e

Satz 6.3

Unter $(T),(L_1),(I_1)$ gilt:

$$\forall\theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad \exists s_{\theta,f} \in H \quad \forall i \in I$$

$$\text{(a)} \quad R(\theta,f) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} s_{\theta,f}\tilde{P}^m_{\theta,f} r_{\theta,f}(s_{\theta,f})}{\sum_{m=0}^{\infty} s_{\theta,f}\tilde{P}^m_{\theta,f} t_{\theta,f}(s_{\theta,f})} = \frac{\sum_{j\in I} \pi_{\theta,f}(j)\, r_{\theta,f}(j)}{\sum_{j\in I} \pi_{\theta,f}(j)\, t_{\theta,f}(j)} \qquad (P^i_{\theta,f}\text{-f.s}$$

$$\text{(b)} \quad W(\theta,f,i) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} s_{\theta,f}\tilde{P}^m_{\theta,f} r_{\theta,f}(s_{\theta,f})}{\sum_{m=0}^{\infty} s_{\theta,f}\tilde{P}^m_{\theta,f} t_{\theta,f}(s_{\theta,f})} = \frac{\sum_{j\in I} \pi_{\theta,f}(j)\, r_{\theta,f}(j)}{\sum_{j\in I} \pi_{\theta,f}(j)\, t_{\theta,f}(j)}$$

Beweis:

$$\text{(a)} \quad R(\theta,f) = \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} r_{\theta,f}(X_m)}{\sum_{m=0}^{N-1} t_{\theta,f}(X_m)} = \overline{\lim_N} \frac{\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} r_{\theta,f}(X_m)}{\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} t_{\theta,f}(X_m)}$$

Aus Satz 6.1 und 6.2 folgt dann die Behauptung (a).

(b) folgt ebenso mit Bem. 1 zu Satz 6.1.

Bemerkung

Für $t_\theta(i,a) \equiv 1$ folgt aus Satz 6.1 (a) auch die Konvergenz von $R(\theta,f)$ gegen

$\sum_{j\in I} \pi_{\theta,f}(j)\, r_{\theta,f}(j)$ im ersten Mittel.

Satz 6.3 besagt insbesondere, daß $R(\theta,f)$ und $W(\theta,f) = W(\theta,f,i)$ vom Anfangszustand unabhängig sind. Ohne Einschränkung kann daher $s_{\theta,f} \in H$ als Anfangszustand zugrundegelegt werden und der Durchschnittsgewinn vom eingebetteten Prozeß her betrachtet werden.

Satz 6.4

Unter $(T),(L_1),(I_1)$ gilt für $\theta \in \Theta$, $f \in F$ und $i \in I$:

$$(a)\quad R(\theta,f) = \frac{\sum_{j\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(j)\, \bar{r}_{\theta,f}(j)}{\sum_{j\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(j)\, \bar{t}_{\theta,f}(j)} \qquad (P^{i}_{\theta,f} - f.s)$$

$$(b)\quad W(\theta,f,i) = \frac{\sum_{j\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(j)\, \bar{r}_{\theta,f}(j)}{\sum_{j\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(j)\, \bar{t}_{\theta,f}(j)}$$

Beweis:

1. Unter den Voraussetzungen gilt Satz 6.3, es genügt daher zu zeigen

$$\frac{\sum_{j\in I} \pi_{\zeta}(j)\, r_{\zeta}(j)}{\sum_{j\in I} \pi_{\zeta}(j)\, t_{\zeta}(j)} = \frac{\sum_{j\in H} \bar{\pi}_{\zeta}(j)\bar{r}_{\zeta}(j)}{\sum_{j\in H} \bar{\pi}_{\zeta}(j)\bar{t}_{\zeta}(j)} \quad .$$

2. Aus Lemma 6.2 folgt die absolute Konvergenz von

$$\sum_{m=0}^{\infty} s_{\zeta}\tilde{P}^{m}_{\zeta}\, r_{\zeta}(s_{\zeta}) = E_{\zeta}\Big[\sum_{m=0}^{\tau_1(s_{\zeta})-1} r_{\zeta}(X_m) \,|\, X_0 = s_{\zeta}\Big] = \frac{1}{\pi_{\zeta}(s_{\zeta})} \sum_{j\in I} \pi_{\zeta}(j)\, r_{\zeta}(j)$$

Daher (vgl. Beweis Satz 6.1 (b)) mit Lemma 5.3 (b):

$$\frac{1}{\pi_{\zeta}(s_{\zeta})} \sum_{j\in I} \pi_{\zeta}(j)\, r_{\zeta}(j) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} s_\zeta \tilde{P}_\zeta^m r_\zeta(s_\zeta)$$

$$= E_\zeta \left[\sum_{m=0}^{\tau_1(s_\zeta)-1} r_\zeta(X_m) | X_0 = s_\zeta \right]$$

$$= E_\zeta \left[\sum_{m=0}^{\bar{\tau}_1(s_\zeta)-1} \bar{r}_\zeta(\bar{X}_m) | \bar{X}_0 = s_\zeta \right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} s_\zeta \bar{Q}_\zeta^m \bar{r}_\zeta(s_\zeta)$$

$$= \frac{1}{\bar{\pi}_\zeta(s_\zeta)} \sum_{j \in H} \bar{\pi}_\zeta(j) \bar{r}_\zeta(j)$$

Dieselbe Überlegung für t_ζ liefert

$$\frac{1}{\pi_\zeta(s_\zeta)} \sum_{j \in I} \pi_\zeta(j)\, t_\zeta(j) = \frac{1}{\bar{\pi}_\zeta(s_\zeta)} \sum_{j \in H} \bar{\pi}_\zeta(j)\, \bar{t}_\zeta(j)$$

daher

$$\frac{\sum_{j \in I} \pi_\zeta(j)\, r_\zeta(j)}{\sum_{j \in I} \pi_\zeta(j)\, t_\zeta(j)} = \frac{\frac{1}{\bar{\pi}_\zeta(s_\zeta)} \sum_{j \in H} \bar{\pi}_\zeta(j)\, \bar{r}_\zeta(j)}{\frac{1}{\bar{\pi}_\zeta(s_\zeta)} \sum_{j \in H} \bar{\pi}_\zeta(j)\, \bar{t}_\zeta(j)}$$

Definition

Unter $(T),(L_1),(I_1)$ sei für $\theta \in \Theta$, $f \in F$

$$g(\theta,f) := \frac{\sum_{j \in I} \pi_{\theta,f}(j)\, r_{\theta,f}(j)}{\sum_{j \in I} \pi_{\theta,f}(j)\, t_{\theta,f}(j)} \quad .$$

$g(\theta,f)$ beschreibt nach Satz 6.3 also sowohl den erwarteten Durchschnittsgewinn als auch (bis auf Nullmengen) den Durchschnittsgewinn als Zufallsgröße für stationäre Pläne.

Im nächsten Lemma wird der Zusammenhang zwischen π_ζ und $\bar{\pi}_\zeta$ untersucht:

Lemma 6.5

Unter $(L_1),(I_1)$ gilt für $j \in I$, $\theta \in \Theta$, $f \in F$

$$\pi_{\theta,f}(j) = \frac{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h) \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}(h,j)}{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h)\, \bar{m}_{\theta,f}(h)}$$

und speziell für $j \in H$

$$\pi_{\theta,f}(j) = \bar{\pi}_{\theta,f}(j) \left(\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h)\bar{m}_{\theta,f}(h) \right)^{-1}$$

Beweis:

1. Unter $(L_1),(I_1)$ existieren $\pi_{\theta,f}$ und $\bar{\pi}_{\theta,f}$ und sind eindeutig bestimmt. Insbesondere gibt es in H positiv rekurrente Zustände (Lemma 5.4), so daß aus $\bar{m}_\zeta \geq 1 \quad \sum_{h\in H} \bar{\pi}_\zeta(h)\bar{m}_\zeta(h) > 0$ und die Wohldefiniertheit der Ausdrücke folgt.

2. Sei für $j \in I$ fest, $d: I \to \mathbb{R}^1_+$, $d(i) := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$, dann gilt

$$\pi_\zeta(j) = \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} P^m_\zeta\, d(i) \quad , \text{ für } i \in I \text{ beliebig}$$

$$= \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_\zeta[d(X_m) | X_0 = i]$$

$$= \frac{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_\zeta(h)\, \bar{d}_\zeta(h)}{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_\zeta(h)\, \bar{m}_\zeta(h)} \quad , \text{ nach Satz 6.4,}$$

$$\text{mit } \bar{d}_\zeta(h) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_\zeta\, d(h) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_\zeta(h,j)$$

□

Aus der Darstellung der stationären Verteilungen in Lemma 6.5 läßt sich leicht deren stetige Abhängigkeit von (θ,f) beweisen. Diese Stetigkeit ist (unter $(L_1),(I_1)$) äquivalent zur Straffheit der Menge $\{\pi_{\theta,f} | (\theta,f) \in \Theta \times F\}$ (vgl. [6], Prop. 2.1). Die Forderung der Straffheit wird häufig zum Ausgangspunkt für den Nachweis θ-optimaler stationärer Pläne ([15], [27]) onne Rückgriff auf die Optimalitätsgleichung gemacht.

Satz 6.6

(a) Unter $(C_{1,2'}),(L_{1,3',4'}),(I_1)$ gilt für $\theta \in \Theta$, $i \in I$

$$f \to \pi_{\theta,f}(i) \quad \text{stetig} \quad .$$

(b) Unter $(C_2),(L_{1-4}),(I_1)$ gilt für $i \in I$

$$(\theta,f) \to \pi_{\theta,f}(i) \quad \text{stetig} \quad .$$

Beweis:

Nach Lemma 6.5 gilt

$$\pi_{\theta,f}(i) = \frac{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h) \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}(h,i)}{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h)\bar{m}_{\theta,f}(h)}$$

$$= \frac{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h) \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, d(h)}{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h)\, \bar{m}_{\theta,f}(h)}$$

$$\text{mit } d(k) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ i & k = i \end{cases} \quad .$$

(a) Aus Satz 5.6 (b) folgt $f \to \bar{m}_{\theta,f}(k)$, $\bar{Q}_{\theta,f}(h,k)$ stetig, und genauso beweist man aus $d(k) \leq 1 \leq y_1(\theta,k)$ die Stetigkeit von $f \to \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, d(h)$.
Mit Satz 2.5 (a) folgt

$f \to \bar{\pi}_{\theta,f}(h)$ stetig.

Damit ist (a) bewiesen.

(b) Wird wie (a) aus Satz 5.6 (d) bewiesen. □

Aus Lemma 6.5 und Satz 6.4 ergibt sich noch folgende "gemischte" Darstellung von $g(\zeta,f)$ durch Größen des eingebetteten und des ursprünglichen Prozesses:

Korollar 6.7

Unter (T), (L_1), (I_1) gilt für $\theta \in \Theta$, $f \in F$

$$g(\theta,f) = \frac{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h)\, \bar{r}_{\theta,f}(h)}{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h)\, \bar{t}_{\theta,f}(h)} \quad .$$

Beweis:

Es gilt

$$g(\zeta) = \frac{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\zeta}(h)\, \bar{r}_{\zeta}(h)}{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\zeta}(h)\, \bar{t}_{\zeta}(h)} \qquad \text{(Satz 6.4)}$$

$$= \frac{\sum_{h\in H} \pi_{\zeta}(h)\, \bar{r}_{\zeta}(h)\, \left(\sum_{j\in H} \bar{\pi}_{\zeta}(j)\, \bar{m}_{\zeta}(j)\right)^{-1}}{\sum_{h\in H} \pi_{\zeta}(h)\, \bar{t}_{\zeta}(h)\, \left(\sum_{j\in H} \bar{\pi}_{\zeta}(j)\, \bar{m}_{\zeta}(j)\right)^{-1}} \qquad \text{(Lemma 6.5)} .$$

□

7. Das asymptotische Verhalten der Beschränkungsfunktionen

In diesem Abschnitt wird das Verhalten von $y_1(\theta,X_m)$ bei festem $\theta \in \Theta$ untersucht und die entsprechenden Ergebnisse aus [7] und [22] zusammengestellt. Diese Aussagen spielen eine wichtige Rolle im nächsten Abschnitt bei der Untersuchung der Optimalitätsgleichung.

Dabei wird von (L_1) in diesem Abschnitt nur

$$\hat{P}_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot) \leq y_1(\theta,\cdot)$$

ausgenutzt. Zusätzlich werden zum Teil die Voraussetzungen

$$(L_5)\colon\ y_1(\theta,\cdot) + e + \hat{P}_{\theta,f}\, y_2(\theta,\cdot) \leq y_2(\theta,\cdot) \quad \text{und}$$

$$(L_8)\colon\ y_1(\theta,\cdot)^2 + \hat{P}_{\theta,f}\, y_3(\theta,\cdot) \leq y_3(\theta,\cdot)$$

benutzt, um eine entsprechende Beschränkung von $y_1(\theta,i)$ bzw. $y_1(\theta,i)^2$ zu erreichen.

Aus dem ersten Lemma folgt insbesondere die Wohldefiniertheit der Integrale in $W(\theta,\delta,i)$ unter der Voraussetzung (L_1).

Lemma 7.1

Unter (L_1) gilt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad E_{\theta,\delta}[y_1(\theta,X_m)|X_0 = i] < \infty$$

Beweis: (vollständige Induktion)

1. $E_{\theta,\delta}\,[y_1(\theta,X_0)|X_0 = i] = y_1(\theta,i) < \infty$

2. $E_{\theta,\delta}\,[y_1(\theta,X_{m+1})|X_0 = i]$

$$= E_{\theta,\delta}\Big[\sum_{j\in I} q_\theta(j|X_m,A_m)\, y_1(\theta,j)\Big|X_0 = i\Big]$$

$$\leq E_{\theta,\delta}[y_1(\theta,X_m)|X_0 = i] + \max_{h\in H} y_1(\theta,h)$$

$$< \infty$$

Das nächste Lemma knüpft an die Vollständigkeitsaussagen aus Abschnitt 3 an; es besagt die wesentliche Vollständigkeit der deterministischen Markoff-Pläne bei festem, endlichem Horizont:

Lemma 7.2

Unter $(C_{1,2'}),(L_{1,3'})$ und $\theta \in \Theta$ sei

$$u: I \times A \to \mathbb{R}^1 \quad \text{mit}$$

$$a \to u(j,a) \quad \text{stetig und}$$

$$|u(j,a)| \leq \text{const}\, y_1(\theta,j) \qquad \text{für } j \in I,\ a \in D(i)\,.$$

Dann gilt

$$\forall m \geq 0 \quad \exists f_0,\ldots,f_m \in F \quad \forall \delta \in \Delta \quad \forall i \in I$$

$$E_{\theta,\delta}[u(X_m,A_m)|X_0 = i] \leq E_{\theta,(f_0,\ldots,f_m)}[u(X_m,A_m)|X_0 = i]$$

Beweis:

1. Mit Satz 3.1 folgt, daß es genügt, die Behauptung für $\delta \in \Delta'$ zu zeigen, also für Pläne, die unabhängig von (Z_m) sind.

2. Aus Lemma 7.1 folgt für $\delta \in \Delta'$

$$E_{\theta,\delta}[|u(X_m,A_m)|\,|X_0 = i] < \infty,$$

und damit für festes $m \in \mathbb{N}$ (vgl. [13] Lemma 15.1, [28] Satz 6.1 und [10] Lemma 3):

$$\forall \delta \in \Delta'. \quad \exists f_0,\ldots,f_m \in F$$

$$E_{\theta,\delta}[u(X_m,A_m)|X_0 = i] \leq E_{\theta,(f_0,\ldots,f_m)}[u(X_m,A_m)|X_0 = i].$$

3. Aus $(L_{1,3'})$ folgt mit Lemma 2.2 für $i \in I$

$$(f_0,\ldots,f_m) \to P_{\theta,f_0} \ldots P_{\theta,f_m}\, u_{f_m}(i) \quad \text{stetig,}$$

und aus (C_1): F^m kompakt.

Daher existiert $(\bar{f}_0,\ldots,\bar{f}_m) \in F^m$, so daß

$$P_{\theta,\bar{f}_0} \cdots P_{\theta,\bar{f}_m} u_{\bar{f}_m}(i) = \sup_{f_0,\ldots,f_m} E_{\theta,(f_0,\ldots,f_m)} [u(X_m,A_m)|X_0 = i].$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Das nächste Lemma ist eine Verallgemeinerung von Satz 2.4 (a) auf den Fall der gleichmäßigen Konvergenz unter allen deterministischen Markoff-Plänen:

Lemma 7.3

Unter $(C_{1,2'}),(L_{1,3',4'})$ gilt für $\theta \in \Theta$, $i \in I$:

$$\sup_{f_0\in F} \hat{P}_{\theta,f_0} \cdot \ldots \cdot \sup_{f_m\in F} \hat{P}_{\theta,f_m} y_1(\theta,\cdot)(i) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Beweis:

[22] Lemma 2 und [16] 3.7 Lemma.

Die folgenden beiden Aussagen stammen aus [7]:

Lemma 7.4

Unter (L_1) gilt für $\theta \in \Theta$, $m \geq 0$, $f_0,\ldots,f_m \in F$ und $i \in I$

$$P_{\theta,f_0} \cdot \ldots \cdot P_{\theta,f_m} y_1(\theta,\cdot)(i)$$

$$\leq y_1(\theta,i) + \max_{h\in H} y_1(\theta,h) + \sum_{h\in H} \sum_{n=1}^{m} \hat{P}_{\theta,f_n} \cdot \ldots \cdot \hat{P}_{\theta,f_m} y_1(\theta,\cdot)(h)$$

$$\leq y_1(\theta,i) + (m+1) \max_{h\in H} y_1(\theta,h) .$$

Beweis:

[7] Lemma 2.6.

Satz 7.5

Unter $(C_{1,2'}),(L_{1,3',4'})$ gilt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$

$$\lim_m \frac{1}{m} E_{\theta,\delta}\,[y_1(\theta,X_m)|X_0 = i] = 0 \quad .$$

Beweis:

1. Aus Lemma 7.2 folgt für $m \geq 0$ die Existenz von $f_0,\ldots,f_m \in F$ mit

$$E_{\theta,\delta}\,[y_1(\theta,X_m)|X_0 = i] \leq P_{\theta,f_0} \circ \ldots \circ P_{\theta,f_m}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \quad .$$

2. Aus Lemma 7.4 daher

$$\forall m \geq 0 \quad E_{\theta,\delta}\,[y_1(\theta,X_m)|X_0 = i]$$

$$\leq y_1(\theta,i) + \max_{j\in H} y_1(\theta,j) + \sum_{h\in H} \sum_{n=1}^{m} \sup_{f_n\in F} \hat{P}_{\theta,f_n} \circ \ldots \circ \sup_{f_m\in F} \hat{P}_{\theta,f_m}\, y_1(\theta,\cdot)(h) .$$

Daraus folgt die Behauptung mit Lemma 7.3. ⌟

Satz 7.5 wird dazu benutzt, um Aussagen für den erwarteten Durchschnittsgewinn W aus der Optimalitätsgleichung abzuleiten. Für entsprechende Aussagen bzgl. R benötigt man die Voraussetzung (L_8), d.h. $y_1(\theta,\cdot)^2$ muß wie zuvor $r_{\theta,f}$ durch eine Funktion $y_3(\theta,\cdot)$ beschränkt sein:

Lemma 7.6

Unter (L_8) gilt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$

(a) $$\overline{\lim}\, \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}\,[y_1(\theta,X_m)^2|X_0 = i] \leq \max_{j\in H} y_3(\theta,j)$$

(b) $$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} E_{\theta,\delta}\,[y_1(\theta,X_m)^2|X_0 = i] < \infty$$

Beweis:

[22], Lemma 7. ⌟

Bemerkung:

Wird in Lemma 7.6 (L_5) statt (L_8) vorausgesetzt, so folgen dieselben Aussagen mit $y_1(\theta,X_m)$ anstelle von $y_1(\theta,X_m)^2$.

Lemma 7.7

Unter (L_8) gilt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$

$$\lim_m \frac{1}{m} y_1(\theta,X_m) = 0 \quad (P^i_{\theta,\delta}\text{-f.s.}) .$$

Beweis:

Mit 7.6 (b) folgt

$$\infty > \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} E_{\theta,\delta}\left[y_1(\theta,X_m)^2 | X_0 = i\right]$$

$$= E_{\theta,\delta}\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} y_1(\theta,X_m)^2 | X_0 = i\right]$$

daher

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} y_1(\theta,X_m)^2 < \infty \quad (P^i_{\theta,\delta}\text{- f.s.})$$

und

$$\lim_m \frac{1}{m^2} y_1(\theta,X_m)^2 = \lim_m \frac{1}{m} y_1(\theta,X_m) = 0 \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{-f.s.})$$

Der folgende Satz von Loève ist eine Verallgemeinerung des Starken Gesetzes der Großen Zahlen auf abhängige Zufallsgrößen:

Satz 7.8

Sei (b_n) eine Folge reeller Zahlen mit $0 \neq b_n \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$ und sei (V_n) eine Folge reeller Zufallsgrößen mit

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{b_m^2} \operatorname{Var}(V_m) < \infty, \text{ so gilt}$$

$$\lim_n \frac{1}{b_n} \sum_{m=0}^{n-1} \{V_m - E[V_m | V_{m-1}, \ldots, V_1]\} = 0 \qquad \text{(f.s.)}$$

Beweis:

[19], S. 387. ⌟

In Verbindung mit Lemma 7.6 erhält man den folgenden Spezialfall:

Satz 7.9

Unter $(L_{1,8})$ sei

$$u: \Theta \times I \times A \times I \times Z \to \mathbb{R}^1 \quad \text{meßbar}$$

mit $|u(\theta,i,a,j,z)| \leq y_1(\theta,i) + y_1(\theta,j)$ für $i,j \in I$, $a \in D(i)$, $z \in Z$.

Dann gilt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$, $i \in I$

(a) $$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left\{E_{\theta,\delta}[u(\theta,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1}) | X_m,Z_m,A_m,\ldots,X_0,A_0] - u(\theta,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})\right\}$$

$$= 0 \quad (P^i_{\theta,\delta} - \text{f.s.}) \ ,$$

(b) $$\lim_N \frac{1}{N} u(\theta,X_N,A_N,X_{N+1},Z_{N+1}) = 0 \quad (P^i_{\theta,\delta} - \text{f.s.}) \ .$$

Beweis:

(a) 1. Sei für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$, $i \in I$ fest und $m \in \mathbb{N}$:

$$V_m := E_{\theta,\delta}[u(\theta,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1}) | X_m,Z_m,A_m,\ldots,X_0,A_0] - u(\theta,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})$$

Dann gilt $E_{\theta,\delta}[V_m | V_{m-1},\ldots,V_0] = 0$.

2. Sei $b_0 = 1$, $b_n = n$, $n \geq 1$, dann folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{b_m^2} \operatorname{Var}_{\theta,\delta}[V_m | X_0 = i]$$

$$\leq E_{\theta,\delta}[V_0^2 | X_0 = i] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} E_{\theta,\delta}[V_m^2 | X_0 = i] \ .$$

3. Für $m \geq 0$ gilt

$$E_{\theta,\delta}\,[V_m^2 | X_0 = i]$$

$$\leq E_{\theta,\delta}\Big[(E_{\theta,\delta}[|u(\theta,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})|X_m,\ldots,X_0,A_0] + |u(\theta,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})|)^2 | X$$

$$\leq E_{\theta,\delta}\Big[c_1\, y_1(\theta,X_m)^2 + c_2\, y_1(\theta,X_{m+1})^2 + c_3(\max_{j\in H} y_1(\theta,j))^2 | X_0 = i\Big]$$

für Konstanten c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}_+^{\frac{1}{}}$, dabei wurde ausgenutzt, daß mit (L_1) gilt:

$$E_{\theta,\delta}\Big[y_1(\theta,X_m)|X_m,\ldots,X_0,A_0\Big] \leq y_1(\theta,X_m) + \max_{j\in H} y_1(\theta,j).$$

4. Aus Lemma 7.6 (b) folgt nun die Behauptung. ____

8. Die Optimalitätsgleichung und die Existenz θ-optimaler, stationärer Pläne bei festem $\theta \in \Theta$.

Federgruen et al. haben in [7] gezeigt, daß unter den Voraussetzungen (T) $(C_{1,2'}),(L_{1,3',4'}),(I_1)$ für festes $\theta \in \Theta$ eine (durch const $y_1(\theta,\cdot)$ beschränkte) Lösung der Optimalitätsgleichung und ein θ-optimaler, stationärer Plan existieren. Die wesentlichen Aussagen dieser Arbeit werden im folgenden ohne Beweis aufgelistet. Die Herleitung der Optimalitätsaussagen erfolgt dabei wie in Ross [26] mit Hilfe des diskontierten Gesamtgewinns.

Mandl schlägt in [22] stattdessen den Weg über eine Approximation mit endlichem Horizont und geeigneter Gewinnfunktion vor (vgl. dazu auch Hordijk [15]). Diese Vorgehensweise erlaubt für $H = \{i^*\}$ eine explizite Darstellung der Lösung der Optimalitätsgleichung, aus der sich insbesondere Stetigkeitseigenschaften ablesen lassen, die später für die Konstruktion des optimalen Planes wichtig sind. Diese Überlegung wird im Beweis zu Satz 9.6 kurz dargestellt.

Für $H \neq \{i^*\}$ scheint sich der Beweis von Mandl nicht übertragen zu lassen.

Im Mittelpunkt der Aussagen dieses Abschnitts steht

$$g(\theta,f) = \frac{\sum_{j\in I} \pi_{\theta,f}(j)\, r_{\theta,f}(j)}{\sum_{j\in I} \pi_{\theta,f}(j)\, t_{\theta,f}(j)} \quad ,$$

das für stationäre Pläne nach Satz 6.3 sowohl $W(\theta,f,i)$ als auch fast sicher $R(\theta)$ beschreibt.

Sei nun $g_\theta := \sup_{f\in F} g(\theta,f)$ für $\theta \in \Theta$. Das erste Lemma zeigt, daß dieses Supremum endlich ist.

Lemma 8.1

Unter $(T),(L_1),(I_1)$ gilt für $\theta \in \Theta$ und $f \in F$

$$|g(\theta,f)| \leq \text{const} \quad ,$$

$$|g_\theta| \leq \text{const} \quad , \text{ wobei const von } \theta \text{ abhängen kann.}$$

Beweis:

Mit Satz 6.4, Lemma 5.2 (a)

$$|g(\theta,f)| \leq \frac{1}{\eta} \sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h)|\bar{r}_{\theta,f}(h)|$$

$$\leq \frac{1}{\eta} \max_{h\in H} y_1(\theta,h)$$

Für die Herleitung der Optimalitätsgleichung definiert man den diskontierten erwarteten Gesamtgewinn im Semi-Markoff-Modell folgendermaßen:

$$V_\beta(\theta,\delta,i) := E_{\theta,\delta}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\beta \sum_{m=0}^{n-1} t_\theta(X_m,A_m)\right) r_\theta(X_n,A_n) | X_0 = i\right]$$

und

$$V_\beta(\theta,i) := \sup_{\delta\in\Delta} V_\beta(\theta,\delta,i) \quad \text{für } \theta \in \Theta,\ \delta \in \Delta,\ i \in I \text{ und } \beta \in (0,1).$$

Die folgenden Aussagen 8.2 - 8.5 stammen aus [7]. Dort werden nur $\delta \in \Delta'$ betrachtet, Satz 3.1 zeigt aber, daß dies auch für die Zielfunktionen $V_\beta(\theta,\delta,i)$ keine Einschränkung bedeutet.

Lemma 8.2

Unter (T),$(C_{1,2'})$,$(L_{1,3'})$ gilt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$, $i \in I$ und $\beta \in (0,1)$

$$|V_\beta(\theta,\delta,i)| \leq \text{const}\ \ y_1(\theta,i)$$

und

$$|V_\beta(\theta,i)| \leq \text{const}\ \ y_1(\theta,i), \text{ wobei const von } \theta \text{ abhängen kann.}$$

Beweis:

(vgl. [7], Abschnitt 3).
Folgt aus Lemma 7.2 und 7.4.

Mit Lemma 8.2 folgt insbesondere die Existenz von $V_\beta(\theta,\delta,i)$.

Lemma 8.3

Unter (T), $(C_{1,2'})$,$(L_{1,3'})$ gilt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$, $i \in I$ und $\beta \in (0,1)$:

(a) $V_\beta(\theta,i) = \sup_{a\in D(i)} \{r_\theta(i,a) + \exp(-\beta\, t_\theta(i,a)) \cdot \sum_{j\in I} q_\theta(j|i,a) V_\beta(\theta,j)\}$

(b) Maximiert $f_\beta \in F$ die rechte Seite in (a) für alle $i \in I$, so ist f_β β-diskontiert-optimal, d.h. $V_\beta(\theta,i) = V_\beta(\theta,f_\beta,i)$, $i \in I$.

(c) Es gibt ein f_β wie in (b).

Beweis: (vgl. [7], Abschnitt 3)

Folgt wie in [26], Theorem 6.1, mit Lemma 8.1. ⌟

Lemma 8.4

Unter (T) $(C_{1,2'})$ $(L_{1,3'})$ (I_1) gilt

$$\forall\theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad \exists s_{\theta,f} \in H \quad \forall i \in I \quad \forall \beta \in (0,1)$$
$$|\beta\, V_\beta(\theta,f,s_{\theta,f})| \leq \text{const} < \infty \quad \text{und}$$
$$|V_\beta(\theta,f,i) - V_\beta(\theta,f,s_{\theta,f})| \leq \text{const}\, y_1(\theta,i),$$

wobei const von θ abhängen kann.

Beweis: (vgl. [7], Lemma 3.1)

Folgt mit Lemma 6.2 (b). ⌟

Mit diesen Vorbereitungen läßt sich nun die Existenz einer Lösung der Optimalitätsgleichung (für den Durchschnittsgewinn) zeigen. Für stationäre Pläne, die das Supremum in der Optimalitätsgleichung annehmen, wird hier zunächst nur gezeigt, daß sie θ-optimal in der Menge der stationären Pläne sind. Aus Satz 8.9 folgt dann unter der zusätzlichen Annahme von $(L_{4'})$ bzw. (L_8), daß diese stationären Pläne θ-optimal (bzgl. W und R) in ganz Δ sind (vgl. dazu auch [7], Theorem 3.4).

Satz 8.5

Unter (T),$(C_{1,2'})$,$(L_{1,3'})$,(I_1) gilt:

Es existiert $v: \Theta \times I \to \mathbb{R}^1$ mit

$|v_\theta(i)| \leq \text{const } y_1(\theta,i)$, wobei const von θ abhängen darf,

so daß für $\theta \in \Theta$ und $i \in I$ folgt

(a) $v_\theta(i) = \sup_{a \in D(i)} \{r_\theta(i,a) - g_\theta\, t_\theta(i,a) + \sum_{j \in I} q_\theta(j|i,a) v_\theta(j)\}$

(b) maximiert $f_\theta \in F$ die rechte Seite in (a) für alle $i \in I$, so gilt $g(\theta,f_\theta) = g_\theta$.

(c) es existiert ein $f_\theta \in F$ wie in (b).

Beweis: (vgl. [7] Theorem 3.2)

Zunächst zeigt man mit Lemma 8.4 (für $j \in I$ und $\theta \in \Theta$; $i \in I$ fest) :

$$|\beta\, V_\beta(\theta,j)| \leq \text{const } y_1(\theta,j) \quad , \quad \text{und}$$
$$|V_\beta(\theta,i) - V_\beta(\theta,j)| \leq \text{const } y_1(\theta,j).$$

Daraus folgt wie in [26] Theorem 6.18 die Existenz von Größen $v_\theta(i)$ und $\tilde{g}_\theta$, die (mit $\tilde{g}_\theta$ anstelle von g_θ) (a) erfüllen.

Mit Satz 2.3 (a) folgt die Stetigkeit der rechten Seite von (a).

Sei $f \in F$ so, daß das Supremum in (a) mit $\tilde{g}_\theta$ anstelle von g_θ angenommen wird, und sei Π_ζ der Vektor der stationären Verteilung von P_ζ, $\zeta = (\theta,f)$. Es folgt

$$\Pi_\zeta\, v_\zeta = \Pi_\zeta\, r_\zeta - \tilde{g}_\theta\, \Pi_\zeta\, t_\zeta + \Pi_\zeta\, P_\zeta\, v_\theta$$

und daraus mit Satz 6.3

$$\tilde{g}_\theta = g(\theta,f) \leq g_\theta.$$

Ist $f \in F$ so gewählt, daß $g(\theta,f) \geq g_\theta - \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$, so folgt

$$\Pi_\zeta\, v_\theta \geq \Pi_\zeta\, r_\zeta - \tilde{g}_\theta\, \Pi_\zeta\, t_\zeta + \Pi_\zeta\, P_\zeta\, v_\theta$$

und daraus

$$g_\theta \leq \tilde{g}_\theta + \varepsilon.$$

Damit folgt $\tilde{g}_\theta = g_\theta$ und (b).

(c) folgt aus der erwähnten Stetigkeit der rechten Seite von (a). ∎

Bemerkung:

1. Aus der Schlußbemerkung von [7] folgt, daß unter der zusätzlichen Voraussetzung (L_5) v_θ aus Satz 8.5 bis auf eine additive Konstante eindeutig gewählt werden kann.

2. Es gilt: zu $j \in I$ kann v_θ so gewählt werden, daß $v_\theta(j) = 0$.
   Dazu setzt man im Beweis zu Satz 8.5 $i := j$, dann gilt
   $v_\theta(j) = \lim_n (V_{\beta_n}(\theta,i) - V_{\beta_n}(\theta,j)) = 0$

Aus Satz 8.5 (b) folgt also bei festem $\theta \in \Theta$: erfüllt $f \in F$ die Optimalitätsgleichung, d.h. gilt für alle $i \in I$

$$v_\theta(i) = r_{\theta,f}(i) - g_\theta\, t_{\theta,f}(i) + P_{\theta,f}\, v_\theta(i) \quad ,$$

so folgt $g(\theta,f) = g_\theta$.

Es gilt folgende Umkehrung :

Lemma 8.6

Unter $(T),(C_{1,2'}),(L_{1,3'}),(I_1)$ gilt für $\theta \in \Theta$:

$f \in F$ ist θ-optimal in F (bzgl. W oder R), d.h.

$g(\theta,f) = g_\theta$

$\Leftrightarrow$

$v_\theta(i) = r_{\theta,f}(i) - g_\theta\, t_{\theta,f}(i) + P_{\theta,f}\, v_\theta(i)$

für alle $i \in I$, die positiv rekurrent unter $P_{\theta,f}$ sind.

Beweis:

Sei Π_ζ wieder die stationäre Verteilung zu P_ζ. Aus Satz 6.3 folgt dann

$$\Psi := \Pi_\zeta r_\zeta - g_\theta \Pi_\zeta t_\zeta + \Pi_\zeta P_\zeta v_\theta - \Pi_\zeta v_\theta$$
$$= \Pi_\zeta r_\zeta - g_\theta \Pi_\zeta t_\zeta + \Pi_\zeta v_\theta - \Pi_\zeta v_\theta$$
$$= \Pi_\zeta r_\zeta - g_\theta \Pi_\zeta t_\zeta$$
$$\text{und } \Psi = 0 \Leftrightarrow g_\theta = \frac{\Pi_\zeta r_\zeta}{\Pi_\zeta t_\zeta} \Leftrightarrow g_\theta = g(\theta,f),$$

und nach 8.5 (a)

$$r_\zeta - g_\theta t_\zeta + P_\zeta v_\theta - v_\theta \leq 0 \quad \text{d.h.}$$
$$g_\theta = g(\theta,f) \Leftrightarrow \Psi = 0$$
$$\Leftrightarrow v_\theta(i) = r_\zeta(i) - g_\theta t_\zeta(i) + P_\zeta v_\theta(i) \quad \text{für alle } i \in I \text{ mit } \pi_\zeta(i) > 0$$

Bei der Konstruktion eines (gleichmäßig in θ) optimalen Plans spielt die Optimalitätsgleichung eine zentrale Rolle. Um die Aussage "f erfüllt die Optimalitätsgleichung in $i \in I$" besser handhaben zu können, wird die folgende Definition eingeführt.
Dabei sei v_θ wie in Satz 8.5 gewählt, d.h. insbesondere $|v_\theta(i)| \leq \text{const } y_1(\theta,i)$. Aus Bemerkung 1 zu Satz 8.5 folgt, daß die folgende Definition unter (L_5) nicht von der Wahl von v_θ abhängt.

Definition:

Seien g_θ und v_θ wie im Beweis zu Satz 8.5.

$$\Phi: \Theta \times I \times A \to \mathbb{R}^1$$
$$\Phi_\theta(i,a) := r_\theta(i,a) - g_\theta t_\theta(i,a) + \sum_{j \in I} q_\theta(j|i,a) v_\theta(j) - v_\theta(i)$$

Lemma 8.7

Unter $(T),(C_{1,2'}),(L_{1,3'}),(I_1)$ gilt für $\theta \in \Theta$, $i \in I$:

(a) $a \in D(i)$ maximiert die Optimalitätsgleichung in $i \in I \Leftrightarrow \Phi_\theta(i,a) = 0$

(b) $\forall a \in D(i) \quad \Phi_\theta(i,a) \leq 0$

(c) $\exists \hat{M}_\theta \in \mathbb{R}^1_+ \quad \forall a \in D(i) \quad |\Phi_\theta(i,a)| \leq \hat{M}_\theta \, y_1(\theta,i)$,

(d) $a \to \Phi_\theta(i,a)$ stetig

Beweis:

(a) und (b) folgen unmittelbar aus 8.5 (a).

(c) $|\Phi_\theta(i,a)| \leq |r_\theta(i,a)| + |g_\theta| t_\theta(i,a) + \sum_{j\in I} q_\theta(j\,i,a)|v_\theta(j)| + |v_\theta(i)|$

$\leq y_1(\theta,i) + \frac{1}{\eta} \max_{h\in H} y_1(\theta,h) + \text{const} \sum_{j\in I} q_\theta(j|i,a) y_1(\theta,j) + \text{const}\; y_1(\theta,i)$

mit "const" wie in Satz 8.5, abhängig von $\theta \in \Theta$. Daraus folgt (a).

(d) Nach $(C_{2'})$ sind die beiden ersten Glieder in Φ stetig, wegen $|v_\theta(i)| \leq \text{const}\quad y_1(\theta,i)$ gilt nach $(L_{3'})$ und Satz 2.2 (a) auch

$$a \to \sum_{j\in I} q_\theta(j|i,a) v_\theta(j) \quad \text{stetig.}$$

Der folgende Satz stammt von Mandl ([21] und [22], vgl. auch v. Hee [11]). Er stellt eine Verallgemeinerung des Lemma 8.6 dar.

Statt der Maximierung der Optimalitätsgleichung in allen $i \in I$, die unter $P_{\theta,f}$ positiv rekurrent sind, wird nur noch verlangt, daß die Optimalitätsgleichung im "asymptotischen Durchschnitt" erfüllt wird. Dadurch ist insbesondere ein θ-Optimalitätskriterium für nicht-stationäre Pläne gegeben.
Zusätzlich folgt noch, daß der (erwartete) Durchschnittsgewinn konvergiert, in W und R also der Limes superior durch den Limes ersetzt werden kann.

Satz 8.8

Unter $(T),(C_{1,2'}),(L_{1,3'}),(I_1)$ gilt für $\delta \in \Delta$, $\theta \in \Theta$, $i \in I$:

(a) Ist zusätzlich (L_8) erfüllt, so folgt

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi_\theta(X_m,A_m) = 0 \quad (P^i_{\theta,\delta}\text{ - f.s.})$$

$$\Rightarrow R(\theta) = g_\theta \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{ - f.s.}) .$$

(b) Ist zusätzlich (L_4') erfüllt, so folgt

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}\,[\Phi_\theta(X_m,A_m)|X_0 = i] = 0$$

$$\Rightarrow W(\theta,\delta,i) = g_\theta \quad .$$

Beweis:

(a) $0 = \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi_\theta(X_m, A_m)$

$$= \lim_N \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(r_\theta(X_m, A_m) - g_\theta \, t_\theta(X_m, A_m) \right) + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{j \in I} q_\theta(j | X_m, A_m) v_\theta(j) - v_\theta(X_m) \right) \right.$$

Weiter gilt:

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{j \in I} q_\theta(j | X_m, A_m) \, v_\theta(j) - v_\theta(X_m) \right)$$

$$= \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(E_{\theta,\delta}[v_\theta(X_{m+1}) | X_m, Z_m, A_m, \ldots, X_0, A_0] - v_\theta(X_{m+1}) \right)$$

$$+ \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(v_\theta(X_{m+1}) - v_\theta(X_m) \right)$$

$$= 0 + \lim_N \frac{1}{N} \left(v_\theta(X_N) - v_\theta(X_0) \right)$$

$$= \lim_N \frac{1}{N} v_\theta(i)$$

$$= 0 \quad (P^i_{\theta,\delta} \text{ - f.s.})$$

nach Satz 7.9 (a) und (b).

Daher $\lim_N \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(r_\theta(X_m, A_m) - g_\theta \, t_\theta(X_m, A_m) \right) \right\} = 0 \quad (P^i_{\theta,\delta} \text{ - f.s.})$.

Aus $\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} t_\theta(X_m, A_m) \geq \eta > 0$ folgt daraus

$$0 = \lim_N \frac{\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} r_\theta(X_m, A_m)}{\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} r_\theta(X_m, A_m)} - g_\theta \qquad (P^i_{\theta,\delta} \text{ - f.s.}) \quad .$$

(b) $0 = \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}\left[\Phi_\theta(X_m, A_m) | X_0 = i \right] \quad =$

$$= \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}\left[r_\theta(X_m,A_m) - g_\theta\, t_\theta(X_m,A_m) \mid X_0 = i \right]$$

$$+ \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}\left[E_{\theta,\delta}[v_\theta(X_{m+1}) \mid X_m,A_m] - v_\theta(X_m) \mid X_0 = i \right]$$

$$= \lim_N \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}[r_\theta(X_m,A_m) \mid X_0 = i] - \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}[t_\theta(X_m,A_m) \mid X_0 = i] \cdot g_\theta \right\}$$

nach Satz 7.5 wegen $|v_\theta(X_m)| \leq \text{const}\ \ y_1(\theta,X_m)$.
Aus (T) folgt wie in (a) die Behauptung. ⌟

Als Korollar zu Satz 8.8 ergibt sich der folgende Satz, der zeigt, das stationäre Pläne $f \in F$ mit $g(\theta,f) = g_\theta$ bereits θ-optimal in ganz Δ sind.
Mit Satz 8.5 (b) folgt daraus also insbesondere die Existenz vor (stationären) θ-optimalen Plänen.

Satz 8.9

Unter $(T),(C_{1,2'}),(L_{1,3'}),(I_1)$ gilt für $\delta \in \Delta$, $\theta \in \Theta$ und $i \in I$:

(a) Ist zusätzlich (L_8) erfüllt, so folgt

$$R(\theta) \leq g_\theta \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{ - f.s.}) \ .$$

(b) Ist zusätzlich $(L_{4'})$ erfüllt, so folgt

$$W(\theta,\delta,i) \leq g_\theta \ .$$

Beweis: ([21], [22])

(a) Aus Lemma 8.7 (b) folgt $\Phi_\theta(X_m,A_m) \leq 0$, also wie im Beweis zu Satz 8.8 (a):

$$0 \geq \overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi_\theta(X_m,A_m)$$

$$= \overline{\lim_N} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (r_\theta(X_m,A_m) - g_\theta\, t_\theta(X_m,A_m)) + B_N \right\}$$

$$= \overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (r_\theta(X_m,A_m) - g_\theta\, t_\theta(X_m,A_m))$$

mit $B_N \to 0$ ($P^i_{\theta,\delta}$- f.s.) und daraus mit (T):

$$0 \geq \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} r_\theta(X_m,A_m)}{\sum_{m=0}^{N-1} t_\theta(X_m,A_m)} - g_\theta \quad .$$

(b) wie (a) aus Satz 8.8 (b). ∎

Bemerkung:

1. Aus Satz 8.9, Lemma 8.6 folgt für festes $\theta \in \Theta$:
   f erfüllt die Optimalitätsgleichung in allen unter $P_{\theta,f}$ positiv rekurrenten Zustän
   ⇒ f ist θ-optimal (in Δ) bzgl. $R(\theta)$ und $W(\theta,\cdot)$.

2. Mit Satz 8.5 folgt damit insbesondere:
   für festes $\theta \in \Theta$ ist F wesentlich vollständig in Δ bzgl. $\delta \to \langle W(\theta,\delta,i) | i \in I\rangle$
   und $\delta \to \langle\langle(\theta,\delta,i) - \text{ess sup } R(\theta) | i \in I\rangle$.
   Mit Satz 6.1 folgt noch: $f \in F \Rightarrow (\theta,f,i) - \text{ess sup } R(\theta) = (\theta,f,i) - \text{ess inf } R(\theta$

3. Weiter hat sich gezeigt, daß der in den (verallgemeinerten) Semi-Markoff-Prozeß (X_m,Z_m) unter $P_{\theta,f}$ eingebettete Markoff-Prozeß (X_m) in dem Sinne "suffizient" ist, daß zur Herleitung θ-optimaler Pläne bei festem θ die Betrachtung von (X_m) (z.B. in Satz 8.8) genügt.
   Zur Herleitung von optimalen (d.h. für alle θ θ-optimalen) Plänen ist dies i.a. nicht der Fall, da bei dem hier eingeschlagenen Weg eine konsistente Schätzfunktion $\hat{\theta}_m$ für den unbekannten Parameter $\theta_0 \in \Theta$ vorliegen muß. Dazu wird es meist notwendig sein, auch die Information aus dem (Z_m)-Prozeß zu benutzen. (vgl. z.B. Abschnitt 11).

Als Korollar zu Satz 8.9 erhält man das folgende Lemma, das es z.B. für Schätz-

funktionen der Gestalt $R(\theta)$ bzw. $S(\theta)$ ermöglicht, sich bei dem Konsistenzbeweis auf stationäre Pläne zu beschränken:

Lemma 8.10

Unter $(T),(C_{1,2'}),(L_{1,3'}),(I_1)$ sei für $\theta \in \Theta$ und $f \in F$ $g(\theta,f) = g_\theta$ (d.h. $g(\theta,f)$ unabhängig von $f \in F$). Dann gilt für alle $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$:

(a) Ist zusätzlich (L_8) erfüllt, so folgt

$$\lim_N \frac{\sum_{m=0}^{N} r_\theta(X_m,A_m)}{\sum_{m=0}^{N} t_\theta(X_m,A_m)} = g_\theta \quad (P^i_{\theta,\delta} - \text{f.s.}) .$$

(b) Ist zusätzlich $(L_{4'})$ erfüllt, so folgt

$$\lim_N \frac{E_{\theta,\delta}\left[\sum_{m=0}^{N} r_\theta(X_m,A_m)\ X_0 = i\right]}{E_{\theta,\delta}\left[\sum_{m=0}^{N} t_\theta(X_m,A_m) | X_0 = i\right]} = g_\theta .$$

Beweis:

(a) Aus 8.9 (a) folgt für $\delta \in \Delta$

$$\overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N} r_\theta(X_m,A_m)}{\sum_{m=0}^{N} t_\theta(X_m,A_m)} \leq \sup_{f\in F} g(\theta,f) = g_\theta \quad (P^i_{\theta,\delta} - \text{f.s})$$

und

$$-\overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N} r_\theta(X_m,A_m)}{\sum_{m=0}^{N} t_\theta(X_m,A_m)} = \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N} -r_\theta(X_m,A_m)}{\sum_{m=0}^{N} t_\theta(X_m,A_m)}$$

$$\leq \sup_{f\in F} -g(\theta,f) = -g_\theta .$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. Ebenso folgt (b).

9. Die Konstruktion eines optimalen Planes

In diesem Abschnitt wird das Ergebnis von Mandl [21] auf den abzählbaren Fall verallgemeinert. Dabei wird der in Mandl [22] eingeschlagene Weg auf ein Semi-Markoff-Entscheidungsmodell unter Unsicherheit übertragen.

Der erste Satz faßt diese Resultate zusammen. Die darin vorausgesetzten Bedingungen werden in den nachfolgenden Sätzen als erfüllbar nachgewiesen.

In diesem Abschnitt wird die Existenz einer (stark) konsistenten Schätzfunktion vorausgesetzt. Im allgemeinen wird diese Schätzfunktion von der Struktur des einzelnen Modells abhängen.

In Abschnitt 12 wird unter zusätzlichen Voraussetzungen die Existenz und Konsistenz eines Maximumlikelihoodschätzers nachgewiesen, in dem Beispiel in Abschnitt 11 zeigt sich aber, daß sich konistente Schätzfunktionen auch unmittelbar aus der Struktur des Modells ergeben können.

Satz 9.1

Es seien (T), $(C_{1,2'})$, $(L_{1,3'})$, (I_1) vorausgesetzt.

(i) Sei $F_\theta \subset F$ für $\theta \in \Theta$, so daß

$$f \in F_\theta \Rightarrow \forall i \in I \quad \Phi_\theta(i,f(i)) = 0 \quad .$$

(ii) Sei für $\theta \in \Theta$ $f_\theta = f(\cdot,\theta) \in F_\theta$, so daß

$$\forall \theta_0 \in \Theta \quad \forall i \in I \quad \theta \to \Phi_{\theta_0}(i,f_\theta(i)) \text{ stetig in } \theta_0 \quad .$$

(iii) Sei für $m \geq 0$ $\hat{\theta}_m\colon I \times (A \times I \times Z)^m \to \Theta$ meßbar .

(iv) $\hat{\delta} \in \mathbb{F}$ sei dann folgendermaßen definiert:

$$\hat{\delta} = (\hat{\delta}_0, \hat{\delta}_1, \ldots) \text{ mit}$$

$$\hat{\delta}_0(i_0) := f(i_0, \hat{\theta}_0(i_0)), \text{ und für } m > 0$$

$$\hat{\delta}_m(i_0,i_1,z_1,\ldots,i_m,z_m) = f(i_m, \hat{\theta}_m(i_0,a_0,i_1,\ldots,a_{m-1},i_m,z_m))$$

$$\text{mit } a_n = \hat{\delta}_n(i_0,i_1,\ldots,i_n,z_n),\ 0 < n < m,\ a_0 = \hat{\delta}_0(i_0)$$

$$\text{und } (i_0,i_1,\ldots,i_m,z_m) \in I \times (I \times Z)^m \quad .$$

(a) Gilt unter (L_8) zusätzlich für alle $\theta_0 \in \Theta$, $i \in I$

$$\hat{\theta}_m(X_0,A_0,\ldots,X_m,Z_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} \theta_0 \qquad (P^i_{\theta_0,\hat{\delta}}\text{-f.s.}) \text{ und}$$

$$\lim_k \overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} y_1(\theta_0,X_m)\chi_{\{X_m \geq k\}} = 0 \qquad (P^i_{\theta_0,\hat{\delta}} \text{ - f.s.}) \ ,$$

so folgt (für alle $\theta_0 \in \Theta$, $i \in I$)

$$R(\theta_0) = g_{\theta_0} \qquad (P^i_{\theta_0,\hat{\delta}} \text{ - f.s.}) \ ,$$

d.h. $\hat{\delta}$ ist optimal bzgl. R.

(b) Gilt unter $(L_{4'})$ statt (a) für alle $\theta_0 \in \Theta$, $i \in I$

$$\hat{\theta}_m(X_0,A_0,\ldots,X_m,Z_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} \theta_0 \qquad (\text{n.W. } P^i_{\theta_0,\hat{\delta}}) \text{ und}$$

$$\lim_k \overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta_0,\hat{\delta}} [y_1(\theta_0,X_m)\chi_{\{X_m \geq k\}} | X_0 = i] = 0 \ ,$$

so folgt (für alle $\theta_0 \in \Theta$, $i \in I$):

$$W(\theta_0,\hat{\delta},i) = g_{\theta_0}$$

d.h. $\hat{\delta}$ ist optimal bzgl. W.

Beweis:

Sei $\theta_0 \in \Theta$ und $i \in I$ fest.

Für $\hat{\theta}_m(X_0,A_0,\ldots,X_m,Z_m)$ wird kurz $\hat{\theta}_m$ geschrieben.

(a) 1. Aus den Voraussetzungen folgt für $j \in I$

$$\lim_m \Phi_{\theta_0}(j,f_{\hat{\theta}_m}(j)) = \Phi_{\theta_0}(j,f_{\theta_0}(j)) = 0 \qquad (P^i_{\theta_0,\hat{\delta}}\text{- f.s.})$$

und daher auch für $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_m \Phi_{\theta_0}(X_m, f_{\hat{\theta}_m}(X_m)) \chi_{\{X_m<k\}}$$

$$= \lim_m \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_{\theta_0}(j, f_{\hat{\theta}_m}(j)) \chi_{\{X_m=j\}} = 0 \qquad (P^i_{\theta_0,\hat{\delta}} - \text{f.s.}) \ .$$

2. Andererseits gilt: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}$

$$\overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} y_1(\theta_0, X_m) \chi_{\{X_m \geq k\}} < \varepsilon$$

also mit Lemma 8.7 (c): $\forall \varepsilon \quad \exists k \in \mathbb{N}$

$$\overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\Phi_{\theta_0}(X_m, A_m)|$$

$$\leq \overline{\lim_N} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\Phi_{\theta_0}(X_m, f_{\hat{\theta}_m}(X_m))| \chi_{\{X_m<k\}} + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} y_1(\theta_0, X_m) \hat{M}_{\theta_0} \chi_{\{X_m \geq k\}} \right\}$$

$$\leq 0 + \hat{M}_{\theta_0} \cdot \varepsilon \ .$$

Daraus folgt mit Satz 8.8 (a) die Behauptung.

(b) 1. Aus den Voraussetzungen folgt mit [20] Theorem 2.3.3 für $j \in I$

$$\Phi_{\theta_0}(j, f_{\hat{\theta}_m}(j)) \xrightarrow[m\to\infty]{} \Phi_{\theta_0}(j, f_{\theta_0}(j)) = 0 \qquad (\text{n.W. } P^i_{\theta_0,\hat{\delta}})$$

und daraus für $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_m \Phi_{\theta_0}(X_m, f_{\hat{\theta}_m}(X_m)) \chi_{\{X_m<k\}} = 0 \quad (\text{n.W. } P^i_{\theta_0,\hat{\delta}}) \ .$$

2. Aus Lemma 8.7 (c) folgt für $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$

$$|\Phi_{\theta_0}(X_m, f_{\hat{\theta}_m}(X_m))| \chi_{\{X_m<k\}} \leq \hat{M}_{\theta_0} \sum_{j=0}^{k-1} y_1(\theta_0, j)$$

d.h. der Ausdruck auf der linken Seite ist für festes k beschränkt, daher folgt aus 1.:

$$\lim_m E_{\theta_0,\hat{\delta}} [|\Phi_{\theta_0}(X_m, f_{\hat{\theta}_m}(X_m))| X_{\{X_m<k\}} | X_0 = i] = 0$$

3. Wie in (a) folgt wieder: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}$

$$\overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |E_{\theta_0,\hat{\delta}} [\Phi_{\theta_0}(X_m, A_m) | X_0 = i]|$$

$$\leq \overline{\lim_N} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta_0,\hat{\delta}} [|\Phi_{\theta_0}(X_m, A_m)| X_{\{X_m<k\}} | X_0 = i] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta_0,\hat{\delta}} [y_1(\theta_0, X_m) X_{\{X_m \geq k\}} | X_0 = i] \right\} \cdot \hat{M}_{\theta_0}$$

$$\leq 0 + \varepsilon \cdot \hat{M}_{\theta_0} .$$

Mit Satz 8.8 (b) folgt die Behauptung. ∎

Bemerkung:

In Satz 8.8 kann man sich auf Schätzfunktionen beschränken, die nicht von (A_m) abhängen, da der Prozeß (X_m, Z_m, A_m) unter $\hat{\delta}$ fast sicher auf $(X_m, Z_m, f_{\hat{\theta}_m}(X_m))$ beschränkt ist, (A_m) also keine zusätzliche Information liefern kann.

Das nächste Lemma liefert Bedingungen, unter denen die Forderung an $y_1(\theta_0, X_m) X_{\{X_m \geq k\}}$ aus Satz 9.1 erfüllt sind. Dabei wird ausgenutzt, daß sich die entsprechenden Ausdrücke als Durchschnittsgewinne in einem Markoff'schen Entscheidungsmodell mit Einschrittgewinnen der Gestalt $y_1(\theta_0, X_m) X_{\{X_m \geq k\}}$ auffassen lassen. Um dafür Satz 8.9 anwenden zu können, müssen entsprechende Ljapunoff-Bedingungen an $y_1(\theta, \cdot)$ gestellt werden:

Lemma 9.2

Unter $(C_{1,2'}), (L_{5-7}), (I_1)$ gilt für $\theta \in \Theta$:

(a) Ist zusätzlich (L_9) erfüllt, so

$$(\theta,\delta,i)\text{ - ess sup } \overline{\lim_N}\ \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} y_1(\theta,X_m)\chi_{\{X_m\geq k\}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

gleichmäßig in $\delta \in \Delta$ und $i \in I$.

(b) $$\overline{\lim_N}\ \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta}\,[y_1(\theta,X_m)\chi_{\{X_m\geq k\}}|X_0 = i] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

gleichmäßig in $\delta \in \Delta$ und $i \in I$.

Beweis: (vgl. [22], Lemmata 9-11)

Sei $\theta \in \Theta$ fest, $k \in \mathbb{N}$.

1. Es wird ein Modell wie in Abschnitt 1 betrachtet, dabei wird ersetzt:
   $r_\theta(j,a)$ durch $y_1(\theta,j)\chi_{\{j\geq k\}} =: r_k(j)$ und
   $t_\theta(j,a)$ durch 1 .
   Dann sind in diesem Modell die Voraussetzung

   (T) erfüllt,
   $(C_{1,2'})$ erfüllt,
   (L_1) ersetzt durch (L_5),
   (L_3') ersetzt durch (L_6),
   (L_4') ersetzt durch (L_7),
   und (L_8) ersetzt durch (L_9) .

2. Aus (L_5) und (I_1) folgt wieder wie in Satz 5.5 die (eindeutige) Existenz von Π_ζ, und es sei (bei festem θ)

   $$\varepsilon_k(f) := \Pi_{\theta,f}\, r_k \quad \text{für } f \in F$$
   $$\varepsilon_k := \sup_{f\in F} \varepsilon_k(f) \quad .$$

   Aus Satz 8.9 folgt dann für $\delta \in \Delta$, $i \in I$

   $$\overline{\lim_N}\ \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} y_1(\theta,X_m)\chi_{\{X_m\geq k\}} = \overline{\lim_N}\ \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} r_k(X_m) \leq \varepsilon_k \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{-f.s.})$$

   unter (L_9), und

$$\overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta} [y_1(\theta,X_m) x_{\{X_m \geq k\}} | X_0 = i]$$

$$= \overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\theta,\delta} [r_k(X_m) | X_0 = i] \leq \varepsilon_k$$

unter (L_7).

3. Zu zeigen bleibt $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

3.1 Aus (L_5) folgt $\Pi_\zeta\, y_1(\theta,\cdot) \leq \Pi_\zeta\, y_2(\theta,\cdot) < \infty$, mit $0 \leq r_k(j) \leq y_1(\theta,j)$ und $r_k(j) \downarrow 0 \quad (k \to \infty)$ folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz $\forall f \in F \quad \varepsilon_k(f) \downarrow 0 \quad (k \to \infty)$.

3.2 Aus $(L_{5,6})$ folgt mit Lemma 5.4 (b), Satz 2.5 (a) und 5.6 (a)

$$f \to \bar{\pi}_{\theta,f}(j) \quad \text{stetig}$$

und daher mit Satz 5.6 (b) aus $(L_{5\text{-}7})$

$$f \to \varepsilon_k(f) = \frac{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h) \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, r_k(h)}{\sum_{h\in H} \bar{\pi}_{\theta,f}(h)\, \bar{m}_{\theta,f}(h)} \quad \text{stetig.}$$

3.3 0 ist als Konstante stetig, daher folgt aus 3.1 und 3.2 mit dem Satz von Dini ([2], S. 106)

$$\lim_k \varepsilon_k = \lim_k \sup_{f\in F} \varepsilon_k(f) = 0 \quad .$$

Bemerkung:

Wie im Beweis zu 9.2 läßt sich unter $(T),(C_{1,2'}),(L_{1,3',4'}),(I_1)$ mit $g(\theta,f)$ anstelle von $\varepsilon_k(f)$ also zeigen: $\forall\theta \in \Theta \quad f \to g(\theta,f)$ stetig, und wegen F kompakt: $\exists f \in F \quad g_\theta = g(\theta,f)$.

Für den Nachweis der Stetigkeit von $\theta \to \Phi_{\theta_0}(i,f_\theta(i))$ bei beliebiger Auswahl von

$f_\theta \in F_\theta$ benötigt man einige topologische Begriffe:

Seien X, Y topologische Räume

$u: Y \to \mathbb{R}^1$ heißt <u>von oben halbstetig</u> (vohs)

$: \Leftrightarrow \forall y \in Y \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(y) \text{ offen } \forall y' \in U(y) \quad u(y') < u(y) + \varepsilon.$

u heißt <u>von unten halbstetig</u> (vuhs): $\Leftrightarrow$ -u ist vohs.

Für $V \subset Y$ sei $u[V] := \{s \in \mathbb{R}^1 | \exists y \in V \quad u(y) = s\}$.
$\Gamma: X \to P(Y) \setminus \{\phi\}$ heißt als mengenwertige Abbildung <u>von oben halbstetig (m-vohs)</u> in $x_0 \in X$

$: \Leftrightarrow \forall V \subset Y$ offen

$\Gamma(x_0) \subset V \Rightarrow \exists U(x_0)$ offen $\forall x \in U(x_0) \quad \Gamma(x) \subset V.$

Γ heißt <u>von unten halbstetig (m-vuhs)</u> in $x_0 \in X$

$:\Leftrightarrow \forall V \subset Y$ offen

$\Gamma(x_0) \cap V \neq \phi \Rightarrow \exists U(x_0)$ offen $\forall x \in U(x_0) \quad \Gamma(x) \cap V \neq \phi.$

Γ heißt <u>m-stetig in $x_0 \in X$</u>

$: \Leftrightarrow \Gamma$ ist m-vohs in x_0 und m-vuhs in x_0

Γ heißt <u>m-vohs (m-vuhs, m-stetig)</u>

$: \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \Gamma$ ist m-vohs (m-vuhs, m-stetig) in x

Γ heißt <u>abgeschlossen</u>

$: \Leftrightarrow$ Graph $(\Gamma) := \{(x,y) | x \in X, y \in \Gamma(x)\}$ ist abgeschlossen in $X \times Y$.

Mit diesen Vorbereitungen lassen sich nun zwei Sätze beweisen, die Aussagen über Stetigkeiten im Zusammenhang mit Extremalpunkten ermöglichen. Ähnliche Sätze finden sich z.B. bei Krabs [17] und Berge [2], z.T. können die folgenden Aussagen

daraus abgeleitet werden. Für die spezielle, hier betrachtete Situation werden jedoch alle Aussagen bewiesen.

Satz 9.3

Seien X, Y topologische Räume und $\Gamma: X \to P(Y) \setminus \{\phi\}$ m-vohs und $u: Y \to \mathbb{R}^1$.

(a) Ist u vohs, so ist

$$x \to \sup \{u(y) | y \in \Gamma(x)\} \text{ vohs.}$$

(b) Ist u stetig, so ist

$$x \to u[\Gamma(x)] \text{ m-vohs.}$$

(c) Ist u stetig und $u[\Gamma(x_0)]$ einelementig für ein $x_0 \in X$, so ist

$$x \to u[\Gamma(x)] \text{ m-stetig in } x_0,$$

insbesondere gilt für

$$\gamma: X \to Y \text{ mit } \gamma(x) \in \Gamma(x),\ x \in X,$$
$$x \to u(\gamma(x)) \text{ stetig in } x_0.$$

Beweis:

(a) (vgl. [2], S. 116, Theorem 2).
Es sei $x_0 \in X$ und $\bar{c} := \sup \{u(y) | y \in \Gamma(x_0)\}$, $\bar{c} \in \overline{\mathbb{R}^1}$.
Aus u vohs folgt für $\varepsilon > 0$ ([2], S. 76 Theorem 1)

$$V := \{y \in Y | u(y) < \bar{c} + \varepsilon\} \text{ offen in } Y \text{ und } \Gamma(x_0) \subset V;$$

daher folgt wegen Γ m-vohs:

$$\exists U(x_0) \text{ offen } \forall x \in U(x_0) \quad \Gamma(x) \subset V \text{ bzw.}$$
$$\exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \quad \forall y \in \Gamma(x) \quad u(y) < \bar{c} + \varepsilon$$

und damit

$$\exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \quad \sup\{u(y) | y \in \Gamma(x)\} < \bar{c} + 2\varepsilon$$

(b) Sei $x_0 \in X$ und $W \subset \mathbb{R}^1$ offen mit $u[\Gamma(x_0)] \subset W$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so daß mit $\bar{c} := \sup\{u(y) | y \in \Gamma(x_0)\}$,

$\underline{c} := \inf\{u(y) | y \in \Gamma(x_0)\}$ gilt :

$u[\Gamma(x_0)] \subset (\underline{c} - \varepsilon, \bar{c} + \varepsilon) \subset W$.

Aus der Stetigkeit von u folgt :

$V := \{y \in Y | \underline{c} - \varepsilon < u(y) < \bar{c} + \varepsilon\}$ offen in Y und $\Gamma(x_0) \subset V$.

Aus Γ m-vohs folgt daher:

$$\exists U(x_0) \text{ offen } \forall x \in U(x_0) \quad \Gamma(x) \subset V \quad \text{bzw.}$$
$$\exists U(x_0) \text{ offen } \forall x \in U(x_0) \quad \forall y \in \Gamma(x) \quad \underline{c} - \varepsilon < u(y) < \bar{c} + \varepsilon \ ,$$

damit gilt aber

$$\exists U(x_0) \text{ offen } \forall x \in U(x_0) \quad u[\Gamma(x)] \subset (\underline{c} - \varepsilon, \bar{c} + \varepsilon) \subset W \ .$$

(c) Gilt $u[\Gamma(x_0)] = \{c\}$ so folgt für $W \subset \mathbb{R}^1$

$$W \cap u[\Gamma(x_0)] \neq \phi \Leftrightarrow u[\Gamma(x_0)] \subset W,$$

daher fallen hier die Begriffe m-vohs und m-vuhs zusammen; mit (b) folgt dann die erste Behauptung.
Es gilt $u(\gamma(x_0)) = c$, daher für $W \subset \mathbb{R}^1$ offen:

$$u(\gamma(x_0)) \in W \Leftrightarrow u[\Gamma(x_0)] \subset W.$$

Mit (b) folgt jetzt die Existenz von $U(x_0)$ offen, so daß

$$\forall x \in U(x_0) \quad u[\Gamma(x)] \subset W,$$

und damit wegen $u(\gamma(x)) \in u[\Gamma(x)]$:

$$\forall x \in U(x_0) \quad u(\gamma(x)) \in W \ ,$$

d.h. $x \to u(\gamma(x))$ ist stetig in x_0.

Der folgende Satz gibt Bedingungen an, unter denen $\theta \to F_\theta$ von oben halbstetig gewählt werden kann.

Satz 9.4

Seien X, Y topologische Räume, Y kompakt, $u: X \times Y \to \mathbb{R}^1$ mit $(x,y) \to u(x,y)$ vohs und $\forall y \in Y \quad x \to u(x,y)$ stetig. Dann gilt für $d \geq 0$

$$x \to \Gamma_d(x) := \{y \in Y | u(x,y) \geq \sup_{y' \in Y} u(x,y') - d\}$$

ist von oben halbstetige Abbildung in die Menge der kompakten, nicht-leeren Teilmengen von Y.

Beweis:

1. Mit [2] S. 76 folgt

$$x \to \sup_{y' \in Y} u(x,y') \quad \text{vuhs und daher}$$

$$(x,y) \to u(x,y) - \sup_{y' \in Y} u(x,y') \quad \text{vohs.}$$

2. Daher ist mit [2], S. 76

$$\{(x,y) \in X \times Y | u(x,y) - \sup_{y' \in Y} u(x,y') \geq -d\} =: \text{Graph } (\Gamma_d)$$

abgeschlossen in $X \times Y$ und daher ist $x \to \Gamma_d(x)$ eine abgeschlossene Abbildung. Aus der Kompaktheit von Y folgt dann mit [2] S. 112 :

$$x \to \Gamma_d(x) = \Gamma_d(x) \cap Y \quad \text{ist m-vohs und kompaktwertig.}$$

3. $\Gamma_d(x)$ ist nicht-leer, denn

für $d > 0$: folgt aus der Definition des Supremums ,

für $d = 0$: aus $(x,y) \to u(x,y)$ vohs folgt

$$\forall x \in X \quad y \to u(x,y) \quad \text{vohs}$$

d.h. das Supremum über dem kompakten Y wird angenommen.

In den nächsten beiden Sätzen wird für zwei stärkere Rekurrenzbedingungen und unterschiedliche F_θ die Stetigkeit von $\theta \to \Phi_{\theta_0}(i,f_\theta(i))$ nachgewiesen. Dabei wird die Voraussetzung (I_2) benutzt, d.h. $\forall \zeta \in \mathfrak{Z}$ $((X_m),P_\zeta)$ ist irreduzibel und positiv rekurrent, daraus folgt nach Satz 5.5 (a) unter (L_1) :

$$\forall \zeta \in \mathfrak{Z} \quad ((\bar{X}_m),\bar{Q}_\zeta) \quad \text{ist irreduzibel und positiv rekurrent.}$$

Satz 9.5

Unter $(T),(C_{1,2}),(L_{1-4}),(I_2)$ gilt

(a) $(\theta,f) \to g(\theta,f)$ stetig ,

(b) $\theta \to F_\theta^1 := \{f \in F \mid g(\theta,f) = g_\theta\}$ ist m-vohs ,

(c) $\forall \theta \in \Theta \quad (f \in F_\theta^1 \Rightarrow \forall i \in I \quad \Phi_\theta(i,f(i)) = 0)$,

(d) $\forall \theta_0 \in \Theta \quad \forall i \in I \quad \theta \to \Phi_{\theta_0}(i,f_\theta(i))$ stetig in θ_0 für $f_\theta \in F_\theta^1$, $\theta \in \Theta$.

Beweis:

(a) Unter den angegebenen Voraussetzungen ist Satz 6.4 erfüllt, d.h.

$$g(\theta,f) = \frac{\bar{\Pi}_{\theta,f}\,\bar{r}_{\theta,f}}{\bar{\Pi}_{\theta,f}\,\bar{t}_{\theta,f}} .$$

Nach Satz 5.6 (d) gilt für $i,j \in I$

$$(\theta,f) \to \bar{Q}_{\theta,f}(i,j),\ \bar{r}_{\theta,f}(i),\ \bar{t}_{\theta,f}(i) \quad \text{stetig}$$

und mit Satz 2.5 (a) daher auch

$(\theta,f) \to \bar{\pi}_{\theta,f}(i)$ stetig ,

daraus folgt sofort (a).

(b) folgt mit (a) und (C_1) aus Lemma 9.4.

(c) Aus Lemma 8.6 folgt :

$f \in F^1 \Rightarrow \Phi_\theta(i,f(i)) = 0$ für alle i, die positiv rekurrent unter $P_{\theta,f}$ sind,

mit (I_2) folgt (c).

(d) Aus Lemma 8.7 (d): $a \to \Phi_{\theta_0}(i,a)$ stetig, daher

$f \to \Phi_{\theta_0}(i,f(i))$ stetig für festes $i \in I$, $\theta_0 \in \Theta$.

Setzt man in Satz 9.3

$X := \Theta$, $Y := F$, $\Gamma(x) = F^1_\theta$, $\gamma(x) = f_\theta$

und $u(y) := \Phi_{\theta_0}(i,f(i))$ (für i und θ_0 fest), so folgt die Behauptung mit (b) aus Satz 9.3 (c). ⌟

Auf die Irreduzibilitäts-Voraussetzung (I_2) kann man verzichten, wenn man stattdessen voraussetzt, daß die endliche Menge H aus den (L)-Bedingungen nur aus einem Zustand i^* besteht (vgl. dazu auch Abschnitt 10.C). Im nächsten Satz wird dabei o. E. ein v_θ (aus Satz 8.5) zugrunde gelegt, für das $v_\theta(i^*) = 0$ gilt. Dabei wird ausgenutzt, daß die Optimalitätsgleichung und damit Φ_θ invariant gegenüber Addition von Konstanten zu v_θ bei festem $\theta \in \Theta$ sind.

Satz 9.6

Unter (T),$(C_{1,2})$,(L_{1-4}) mit $H = \{i^*\}$ für ein $i^* \in I$ gilt:
v_θ kann so gewählt werden, daß folgt

(a) $\forall i \in I$ $\quad \theta \to g_\theta$, $v_\theta(i)$ stetig,

(b) $\forall i \in I \quad (\theta,f) \to \Phi_\theta(i,f(i))$ stetig,

(c) $\theta \to F_\theta^2 := \{f \in F | \forall i \in I \quad \Phi_\theta(i,f(i)) = 0\}$ m-vohs ,

(d) $\forall \theta_0 \in \Theta \quad \forall i \in I \quad \theta \to \Phi_{\theta_0}(i,f_\theta(i))$ ist stetig in θ_0 für $f_\theta \in F_\theta^2$, $\theta \in \Theta$.

Beweis:

(a) 1. Wie in Bem. 2 zu Satz 6.1 folgt $((L_1), H = \{i^*\}) \Rightarrow (I_1)$, daraus folgt wie in Satz 9.5 (a)

$(\theta,f) \to g(\theta,f)$ stetig.

Aus F kompakt folgt dann: $\theta \to g_\theta = \max_{f\in F} g(\theta,f)$ stetig.

2. Sei v_θ Lösung der Optimalitätsgleichung, dann ist auch $\bar{v}_\theta(i) := v_\theta(i) - v_\theta(i^*)$ Lösung mit $|\bar{v}_\theta(i)| \leq$ const $y_1(\theta,i)$. Sei also o.E. $v_\theta(i^*) = 0$, dann mit (L_4)

$$v_\theta(i) = \sup_{f\in F} \{r_{\theta,f}(i) - g_\theta\, t_{\theta,f}(i) + \hat{P}_{\theta,f}\, v_\theta(i)\}$$

$$= r_{\theta,\bar{f}}(i) - g_\theta\, t_{\theta,\bar{f}}(i) + \hat{P}_{\theta,\bar{f}}\, v_\theta(i)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,\bar{f}}\, c_{\theta,\bar{f}}(i)$$

$$\leq \sup_{f\in F} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, c_{\theta,f}(i)$$

für ein $\bar{f} \in F$ mit $c_{\theta,f}(i) := r_{\theta,f}(i) - g_\theta\, t_{\theta,f}(i)$.

Umgekehrt, für $f \in F$

$v_\theta(i) \geq c_{\theta,f}(i) + \hat{P}_{\theta,f}\, v_\theta(i)$ und daraus

durch wiederholtes Einsetzen mit (L_4) :

$$v_\theta(i) \geq \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, c_{\theta,f}(i) + \overline{\lim_m}\, \hat{P}^m_{\theta,f}\, v_\theta(i) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, c_{\theta,f}(i) ,$$

$$v_\theta(i) \geq \sup_{f\in F} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, c_{\theta,f}(i) \quad .$$

3. Aus (L_1) folgt für $\theta \in \Theta$, $f \in F$ und $i \in I$:

$$|c_{\theta,f}(i)| + \hat{P}_{\theta,f}(1 + |g_\theta|)y_1(\theta,\cdot)(i) \leq (1 + |g_\theta|)y_1(\theta,\cdot),$$

und daraus

$$\sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, c_{\theta,f}(i) \leq (1 + |g_\theta|)y_1(\theta,i),$$

und

$$\sum_{m=N}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, c_{\theta,f}(i) = \hat{P}^N_{\theta,f} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, c_{\theta,f}(i) \leq (1 + |g_\theta|)\hat{P}^N_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i).$$

4. Aus 1. folgt mit (C_2) $(\theta,f) \to c_{\theta,f}(i)$ stetig, $i \in I$, und mit Satz 2.3 (b) aus $(L_{1\text{-}3})$ und $\theta \to (1 + |g_\theta|)$ stetig: $\forall m \geq 0 \quad \forall i \in I \quad (\theta,f) \to \hat{P}^m_{\theta,f}\, c_{\theta,f}(i)$ stetig. Daher folgt wie in Satz 5.6 (d) aus (L_4) und 3.:

$$(\theta,f) \to \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, c_{\theta,f}(i) \quad \text{stetig}.$$

Aus der Kompaktheit von F unter (C_1) folgt schließlich

$$\theta \to v_\theta(i) = \sup_{f\in F} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, c_{\theta,f}(i) \text{ stetig.}$$

(b) Aus $|v_\theta(i)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, |c_{\theta,f}|(i) \leq (1 + |g_\theta|)y_1(\theta,i)$ folgt mit (a) aus Satz 2.3 (b) wieder :

$$(\theta,f) \to \sum_{j\in I} q_\theta(j|i,f(i))v_\theta(j) \quad \text{stetig für } i \in I,$$

und daher

$$(\theta,f) \to \Phi_\theta(i,f(i)) = c_{\theta,f}(i) + P_{\theta,f}\, v_\theta(i) - v_\theta(i) \quad \text{stetig.}$$

(c) Sei $i \in I$ fest. Dann folgt mit Satz 8.5 (a)

$$0 = \sup_{f\in F} \Phi_\theta(i,f(i)) \quad \text{und daher}$$

$$\theta \to F^2_\theta(i) := \{f \in F | \Phi_\theta(i,f(i)) = 0\}$$

$$= \{f \in F | \Phi_\theta(i,f(i)) = \sup_{f' \in F} \Phi_\theta(i,f'(i))\}$$

m-vohs nach Lemma 9.4.

Daraus folgt mit [2] S. 114:

$$\theta \to F^2_\theta = \bigcap_{i \in I} F^2_\theta(i) \quad \text{m-vohs}$$

(d) folgt wie in Satz 9.5 (d) mit $\Gamma(x) = F^2_\theta$ aus Satz 9.3 (c). ∎

Bemerkung:

1. Nach Satz 8.5 gilt: $F^2_\theta \subset F^1_\theta$ und mit Lemma 8.6 $(I_2) \Rightarrow F^2_\theta = F^1_\theta$. Ist (X_m) nicht irreduzibel, so wird aber i.a. $F^1_\theta \neq F^2_\theta$ gelten. Die unterschiedliche Darstellung von F^1_θ und F^2_θ ermöglicht es im ersten Fall, ohne die Stetigkeit von $\theta \to v_\theta(i)$ auszukommen.

2. Der Beweis von Satz 9.6 (i) benutzt eine Darstellung von v_θ, wie sie in [15] und [22] zugrundegelegt wird:

$$v_\theta(i) = \sup_{f \in F} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{P}^m_{\theta,f}\, c_{\theta,f}(i) = \sup_{f \in F} E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(i^*)-1} c_{\theta,f}(X_m) | X_0 = i\right]$$

beschreibt den unter stationären Plänen f maximal zu erwartenden "Gewinn" bis zum ersten Eintritt nach $H = \{i^*\}$, wenn als "Einschrittgewinn" die Differenz $r_{\theta,f}(i) - g_\theta\, t_{\theta,f}(i)$ zwischen dem tatsächlichen Gewinn $r_{\theta,f}$ und dem während dieses Schrittes bei maximaler Rate g_θ zu erwartenden Gewinn $g_\theta\, t_{\theta,f}$ zugrundegelegt wird.

Aus $g_\theta \geq \dfrac{\Pi_{\theta,f}\, r_{\theta,f}}{\Pi_{\theta,f}\, t_{\theta,f}}$ folgt $\Pi_{\theta,f}\, c_{\theta,f} \leq 0$ und daraus: $r_{\theta,f}(i) - g_\theta\, t_{\theta,f}(i) \leq 0$ für i positiv rekurrent. Mit $v_\theta(i) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{\theta,\bar{f}}\, c_{\theta,\bar{f}}(i)$

$\Rightarrow v_\theta(i) = r_{\theta,\bar{f}}(i) - g_\theta t_{\theta,\bar{f}}(i) + P_{\theta,\bar{f}}\, v_\theta(i)$ folgt die anschaulich plausible Interpretation, daß das Aufsuchen eines Plans $\bar{f} \in F$, der die Optimalitätsgleichung maximiert, im wesentlichen der Minimierung der oben beschriebenen

erwarteten Differenz bis zum Eintritt in den ausgezeichneten, positiv rekurrenten Zustand i^* enspricht.

Zusammenfassend kann jetzt Satz 9.1 so geschrieben werden:

Satz 9.7

Es gelte $(T),(C_{1,2}),(L_{1-7})$ und $\{(I_2)$ oder $H = \{i^*\}\}$,

Sei $F_\theta := \{f \in F \mid \forall i \in I \quad \Phi_\theta(i,f(i)) = 0\}$, $\theta \in \Theta$. Sei $(\hat{\theta}_m)_{m\geq 0}$ mit

$\hat{\theta}_m: I \times (A \times I \times Z)^m \to \Theta$ meßbar, gegeben und für

$f_\theta = f(\cdot,\theta) \in F_\theta$, $\theta \in \Theta$ sei

$\hat{\delta} = (\hat{\delta}_0,\hat{\delta}_1,\ldots) \in \mathbb{F}$ definiert durch

$\hat{\delta}_0(i_0) := f(i_0,\hat{\theta}_0(i_0))$, $i_0 \in I$

$\hat{\delta}_m(i_0,\ldots,i_m,z_m) := f(i_m,\hat{\theta}_m(i_0,a_0,\ldots,i_m,z_m))$ für $m \geq 1$ und

$i_k \in I$, $z_k \in Z$, $a_k := \hat{\delta}_k(i_0,\ldots,i_k,z_k) \in A$, $k \leq m$.

(a) Gilt zusätzlich $(L_{8,9})$ und

$$\forall\theta_0 \in \Theta \quad \forall i \in I \quad \hat{\theta}_m(X_0,\ldots,X_m,Z_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} \theta_0 \quad (P^i_{\theta_0,\hat{\delta}} \text{ - f.s.}),$$

so folgt $\forall\theta_0 \in \Theta \quad \forall i \in I \quad R(\theta_0) = g_{\theta_0} \quad (P^i_{\theta_0,\hat{\delta}}$ -f.s.), d.h. $\hat{\delta}$ ist optimal bzgl. R .

(b) Gilt $\forall\theta_0 \in \Theta \quad \forall i \in I \quad \hat{\theta}_m(X_0,A_0,\ldots,X_m,Z_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} \theta_0$ (n.W. $P^i_{\theta_0,\hat{\delta}}$),

so folgt $\forall\theta_0 \in \Theta \quad \forall i \in I \quad W(\theta_0,\hat{\delta},i) = g_{\theta_0}$, d.h. $\hat{\delta}$ ist optimal bzgl. W.

Beweis:

Folgt aus den Sätzen 9.1 - 9.6. ⌟

Mit der Konstruktion eines gleichmäßig in allen $\theta \in \Theta$ θ-optimalen Plans $\hat{\delta} \in \mathbb{F}$ ist auch gezeigt worden, daß $\mathbb{F}$ wesentlich vollständig ist in Δ bzgl. der Abbildungen $\delta \to \langle W(\theta,\delta,i) \mid \theta \in \Theta, i \in I\rangle$ und $\delta \to \langle(\theta,\delta,i) \text{ - ess sup } R(\theta) \mid \theta\in\Theta, i\in I\rangle$.

10. Ergänzungen

10.A Verallgemeinerte Ziel- und Gewinnfunktionen

Die bisherigen Resultate sollen nun verallgemeinert werden; zum einen dadurch, daß Gewinnfunktionen der Gestalt $\tilde{r}_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})$ betrachtet werden, zum anderen durch Ersetzung der Zielfunktion

$$R(\theta) = \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} r_\theta(X_m,A_m)}{\sum_{m=0}^{N-1} t_\theta(X_m,A_m)} \quad \text{durch}$$

$$S(\theta) := \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{r}_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})}{\sum_{m=0}^{N-1} T_{m+1}} \quad .$$

$S(\theta)$ gibt den asymptotischen Durchschnittsgewinn bzgl. der "tatsächlich" verstrichenen Zeit $\sum_{m=0}^{N-1} T_{m+1}$ wieder, gleichzeitig wird dadurch aber der Rahmen des Prozesses (X_m,A_m), auf dem die bisherige Analyse fußte, verlassen.

Sei nun $\tilde{r}: \Theta \times I \times A \times I \times Z \to \mathbb{R}^1$, meßbar, gegeben und sei

$$\hat{r}_\theta(i,a) := \sum_{j\in I} \int_Z Q_\theta(j,dz|i,a)\tilde{r}_\theta(i,a,j,z)$$

$$= E_{\theta,\delta}\,[\tilde{r}_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})|X_m = i,\ A_m = a]$$

$$t_\theta(i,a) = E_{\theta,\delta}\,[T_{m+1}|X_m = i,A_m = a]\ \text{wie bisher},$$

$$t^2_\theta(i,a) := E_{\theta,\delta}\,[T^2_{m+1}|X_m = i,A_m = a]$$

$$= \sum_{j\in I} \int_0^\infty t^2\, Q_\theta(j,Y,dt|i,a)$$

Wird $r_\theta(i,a)$ durch $\hat{r}_\theta(i,a)$ ersetzt, so gelten offensichtlich alle bisherigen Aussagen weiter.

Mit $\hat{}$ seien alle Größen gekennzeichnet, die mit Hilfe von $\hat{r}_\theta$ anstelle von r_θ konstruiert werden.

Die Grenzwertaussagen aus Satz 7.8 bzw. 7.9 liefern unter geeigneten Beschränkungsannahmen die fast sichere Übereinstimmung von S und R.

Dazu wird die folgende Voraussetzung (B) gemacht:

(B) (1) $\forall(\theta,i,a,j,z) \in \Theta \times I \times A \times I \times Z$

$$|\tilde{r}_\theta(i,a,j,z)| \leq y_1(\theta,i) + y_1(\theta,j)$$

(2) $\forall\theta \in C \quad \forall(i,a) \in K$

$$t_\theta^2(i,a) \leq y_1(\theta,i)$$

Bemerkung:

(B_1) wird für die Anwendung von Satz 7.9 benötigt. Auch (B_2) ermöglicht eine Aussage wie in Satz 7.8 (vgl. nächstes Lemma), so daß statt (B_1) auch gefordert werden kann

$$\forall\theta \in \Theta \quad E_{\theta,f}\left[(\tilde{r}_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1}))^2 \mid X_m,A_m\right] \leq y_1(\theta,X_m)$$

(der Ausdruck ist unabhängig von f und m).
Im folgenden wird jedoch die einfachere Bedingung (B_1) zugrundegelegt. Im nächsten Lemma wird Satz 7.8 auf die Verweilzeiten T_m angewendet, dabei überträgt sich die Voraussetzung (T) in gewisser Weise auf T_m.

Lemma 10.1

Unter $(L_{1,8}),(B_2)$ gilt für $\theta \in \Theta, \delta \in \Delta$ und $i \in I$:

(a) $\lim\limits_N \frac{1}{N} \sum\limits_{m=0}^{N-1} (T_{m+1} - t_\theta(X_m,A_m)) = 0 \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{ - f.s.})$,

(b) aus (T) folgt

$$\liminf_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} T_{m+1} \geq \eta > 0 \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{- f.s.}) \ ,$$

und $$\sum_{m=0}^{N-1} T_{m+1} \uparrow \infty \quad (N \to \infty) \ (P^i_{\theta,\delta} \text{ - f.s.}) \ .$$

Beweis:

Sei $V_m := T_{m+1} - t_\theta(X_m,A_m)$, dann folgt $E_{\theta,\delta}\,[V_m|V_{m-1},\ldots,V_0] = 0$.
Aus (B_2) folgt:

$$E_{\theta,\delta}\,[V_m^2|X_0 = i] \leq E_{\theta,\delta}\,[3\,T_{m+1}^2 + 3\,t_\theta(X_m,A_m)^2|X_0 = i]$$

$$= E_{\theta,\delta}\left[3\,E_{\theta,\delta}\,[T_{m+1}^2|X_m,A_m] + 3\,t_\theta(X_m,A_m)^2|X_0 = i\right]$$

$$= E_{\theta,\delta}\,[3\,t_\theta^2(X_m,A_m) + 3\,t_\theta(X_m,A_m)^2|X_0 = i]$$

$$\leq E_{\theta,\delta}\,[6\,y_1(\theta,X_m)^2|X_0 = i] \ .$$

Daher mit Lemma 7.6 (b)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{Var}_{\theta,\delta}\,[V_m|X_0 = i] < \infty,$$

mit Satz 7.8 folgt jetzt die Behauptung (a).

(b) Mit (a) folgt $P^i_{\theta,\delta}$ - fast sicher

$$\liminf_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} T_{m+1} = \liminf_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} t_\theta(X_m,A_m)$$

$$\geq \eta > 0,$$

daraus folgt auch die zweite Behauptung von (b).

Die Größe S ist mit Lemma 10.1 (b) also in dem Sinne wohldefiniert, daß es fast sicher $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für $n \geq N$ der Nenner positiv ist.

Es gilt der folgende Satz über den Zusammenhang von $\hat{W}$, R und S:

Satz 10.2

(a) Für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$ gilt

$$\overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N} E_{\theta,\delta}\,[\hat{r}_\theta(X_m,A_m)|X_0 = i]}{\sum_{m=0}^{N} E_{\theta,\delta}\,[t_\theta(X_m,A_m)|X_0 = i]} = \hat{W}(\theta,\delta,i) =$$

$$\overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N} E_{\theta,\delta}\,[\tilde{r}_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})|X_0 = i]}{\sum_{m=0}^{N} E_{\theta,\delta}\,[T_{m+1}|X_0 = i]} \quad .$$

(b) Gilt (B), (T), (I_1) und erfüllt $\hat{r}_\theta$ $(C_{1,3'}),(L_{1,3',8})$, so folgt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$:

$$\hat{R}(\theta) = S(\theta) \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{ - f.s.}) \text{ , d.h.}$$

$$\overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N} \hat{r}_\theta(X_m,A_m)}{\sum_{m=0}^{N} t_\theta(X_m,A_m)} = \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N} \tilde{r}_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})}{\sum_{m=0}^{N} T_{m+1}} \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{ - f.s.}) \,.$$

Beweis:

(a) folgt sofort aus den Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts und der Definition von $\hat{r}_\theta$, t_θ.

(b) Aus $(B_1),(L_{1,8})$ folgt mit Satz 7.9 (a):

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\tilde{r}_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1}) - \hat{r}_\theta(X_m,A_m)\right) = 0 \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{ - f.s.}) \,,$$

und aus Satz 8.9 (a) :

$$\overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{r}_\theta(X_m,A_m) \leq \sup_{f\in F} \Pi_{\theta,f} \hat{r}_{\theta,f} < \infty \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{-f.s.}) ,$$

und $\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{r}_\theta(X_m,A_m)$ ist in $N \in \mathbb{N}$ fast sicher beschränkt. Lemma 10.1 zeigt schließlich, daß die Voraussetzung des folgenden Lemmas 10.3 für

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{r}_\theta(X_m,A_m) \quad , \; b_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} t_\theta(X_m,A_m)$$

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{r}_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1}) \; , \; \tilde{b}_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} T_{m+1}$$

$P^i_{\theta,\delta}$ - fast sicher erfüllt sind.

Damit folgt die Behauptung aus Lemma 10.3.

Lemma 10.3

Es seien reelle Zahlenfolgen $(a_n),(b_n),(\tilde{a}_n),(\tilde{b}_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ gegeben mit

$$\lim_n (a_n - \tilde{a}_n) = 0 \quad , \; \lim_n (b_n - \tilde{b}_n) = 0,$$

a_n beschränkt,

$$\underline{\lim_n} \, b_n \geq \varepsilon \quad \text{und} \quad \underline{\lim_n} \, \tilde{b}_n \geq \varepsilon \quad \text{für ein } \varepsilon > 0.$$

Dann gilt

$$\lim_n \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{\tilde{a}_n}{\tilde{b}_n} \right) = 0 \quad \text{und}$$

$$\overline{\lim_n} \, \frac{a_n}{b_n} = \overline{\lim_n} \, \frac{\tilde{a}_n}{\tilde{b}_n} < \infty .$$

Beweis:

Es folgt, da $b_n, \tilde{b}_n \geq \frac{\varepsilon}{2}$ für n genügend groß:

$$\lim_n \left(\frac{\tilde{a}_n}{\tilde{b}_n} - \frac{a_n}{\tilde{b}_n} \right) = \lim_n \frac{1}{\tilde{b}_n} (\tilde{a}_n - a_n) = 0$$

und wegen a_n beschränkt, $b_n \cdot \tilde{b}_n \geq (\frac{\varepsilon}{2})^2 > 0$:

$$\lim_n \left(\frac{a_n}{\tilde{b}_n} - \frac{a_n}{b_n} \right) = \lim_n \frac{a_n(b_n - \tilde{b}_n)}{b_n \tilde{b}_n} = 0,$$

daher

$$0 = \lim_n \left(\frac{\tilde{a}_n}{\tilde{b}_n} - \frac{a_n}{\tilde{b}_n} + \frac{a_n}{\tilde{b}_n} - \frac{a_n}{b_n} \right) = \lim \left(\frac{\tilde{a}_n}{\tilde{b}_n} - \frac{a_n}{b_n} \right) .$$

Allgemein gilt für reelle Folgen $(c_n), (d_n)$:

$$\lim_n (c_n - d_n) = 0 \Rightarrow \overline{\lim_n} \, c_n = \overline{\lim_n} \, d_n .$$

Daher folgt die Behauptung mit $\overline{\lim_n} \, \frac{a_n}{b_n} < \infty$.

Die Resultate bzgl. des erwarteten Durchschnittsgewinns W lassen sich also ohne Einschränkung auf die verallgemeinerte Gewinnfunktion $\tilde{r}_\theta$ übertragen, indem die entsprechenden Bedingungen an $\hat{r}_\theta$ gestellt werden.

Für den Durchschnittsgewinn als Zufallsgröße verfährt man ebenso: die Voraussetzungen der Sätze müssen für $\hat{r}_\theta$ erfüllt sein, dann gelten die Aussagen für $\hat{R}(\theta)$; unter den Voraussetzungen von Satz 10.2 (b) folgt dann wegen $\hat{R}(\theta) = S(\theta)$ (fast sicher) die entsprechende Behauptung für S.

Damit sind die bisherigen Resultate erheblich erweitert worden. Insbesondere ist dadurch gezeigt, daß es einen bzgl. $S(\theta)$ θ-optimalen, stationären Plan gibt (derselbe, der für $R(\theta)$ θ-optimal ist), und daß das in Abschnitt 9 beschriebene Verfahren einen optimalen Plan für S liefert.

Die zusätzliche Abhängigkeit der Gewinnfunktion $\tilde{r}_\theta$ von $Z_{m+1} = (Y_{m+1}, T_{m+1})$ erlaubt z. B. die Einbeziehung von Gewinnraten (vgl. [26] S. 159):

$$\tilde{r}_\theta(i,a,j,t) := r_{1,\theta}(i,a,j) + t \cdot r_{2,\theta}(i,a,j) ,$$

$$\text{oder } \tilde{r}_\theta(i,a,j,t) := \int_0^t \tilde{\tilde{r}}_\theta(i,a,j,s) \lambda_1(ds) .$$

Für diese spezielle Gewinnfunktion zeigt Ross [26], Theorem 7.5, remarks, daß $S(\theta)$ und $W(\theta,f)$ für stationäre Pläne $f \in F$ fast sicher übereinstimmen. Mit Satz 10.2 ist dieses Resultat also für allgemeinere $\tilde{r}_\theta$ auf beliebige $\delta \in \Delta$ ausgeweitet worden. Dadurch kann in Abschnitt 12 Satz 10.2 für den Beweis der Konsistenz von Schätzfunktionen benutzt werden, die gerade die Gestalt $S(\theta_0)$ haben (für geeignete $\tilde{r}_\theta$).

Als eine weitere mögliche Ausweitung kann eine Zielfunktion der Gestalt

$$\overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N} \tilde{r}_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})}{\sum_{m=0}^{N} u_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})}$$

betrachtet werden, wobei $u: O \times I \times A \times I \times Z \to \mathbb{R}^1_+$, meßbar. (Entsprechend für den erwarteten Durchschnittsgewinn).

So kann etwa in dem Warteschlangenbeispiel in Abschnitt 11 statt des "Gewinns pro Zeit" der "Gewinn pro Bedienungszeit" betrachtet werden.

Damit die bisherigen Resultate für diese Zielfunktion gelten, muß $u(\cdot)$ die Bedingungen erfüllen, die vorher an T_m gestellt wurden, z.B. (T):

$$E_{\theta,f}\left[u_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1}) \middle| X_m = i,\ A_m = a\right] \geq \eta > 0 \quad \text{für alle } \theta,a,i.$$

Ebenso (L_1) und (B_2) (bzw. eine (B_1) entsprechende Forderung, vgl. Bem. zu (B)).

Für den Spezialfall $u(\cdot) \equiv 1$ sind diese Voraussetzungen erfüllt und es gilt als Korollar zu Satz 10.3:

Satz 10.4

Es sei $\hat{r}: O \times I \times A \times I \times Z \to \mathbb{R}^1$ meßbar gegeben, so daß (B_1) und für $\hat{r}$ $(L_{1,8})$ erfüllt sind. Dann gilt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$

$$\overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{r}_\theta(X_m,A_m) = \hat{R}(\theta)$$
$$= \overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{r}_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1}) \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{ - f.s.}) .$$

Beweis:

Folgt unmittelbar aus Satz 10.3 bzw. 7.9 (a).

Dieser Satz wird in Abschnitt 12 zur Herleitung konsistenter Schätzfunktionen benutzt.

10.B ε-optimale Pläne

In diesem Unterabschnitt wird gezeigt, daß der Plan $\hat{\delta}$ aus Satz 9.7 eine gewisse Stabilität gegenüber "Verschlechterungen" der f_θ, $\theta \in \Theta$, aufweist: Werden statt der θ-optimalen Pläne f_θ in Satz 9.7 Pläne f'_θ benutzt, die die Optimalitätsgleichung nur "bis auf ε" erfüllen, daher für festes θ auch nur "ε-optimal" sind, so verfehlt der Plan $\hat{\delta}$ den maximalen Durchschnittsgewinn höchstens um $\frac{\varepsilon}{\eta}$, gleichmäßig in $\theta \in \Theta$.

Für den Beweis dieser Aussage wird die Halbstetigkeit der Menge der "ε-optimalen" Pläne benötigt; zur Anwendung von Satz 9.4 werden daher weiter die Stetigkeits- und Kompaktheitsbedingungen vorausgesetzt, die nach Satz 8.5 die Existenz θ-optimaler (d.h. für festes θ "o-optimaler") Pläne garantieren.

Für Anwendungen kan es jedoch eine Vereinfachung bedeuten, wenn man bei der Konstruktion von $\hat{\delta}$ statt der Mengen der θ-optimalen Pläne größere Mengen stationärer Pläne zur Verfügung hat. Der folgende Satz beschränkt sich auf den Fall $H = \{i^*\}$ und auf stark konsistente Schätzfunktionen $\hat{\theta}_m$.

Satz 10.5

Es gelte (T), $(C_{1,2})$,(L_{1-7}) und es sei $H = \{i^*\}$ für ein $i^* \in I$.

Für $\varepsilon \geq 0$ sei $F'_\theta := \{f \in F \mid \forall i \in I \;\; \Phi_\theta(i,f(i)) \geq -\varepsilon\}$; $\theta \in \Theta$. Sei $(\hat{\theta}_m)$ mit $\hat{\theta}_m$: $I \times (A \times I \times Z)^m \to \Theta$ meßbar gegeben.

Für $f'(\cdot,\theta) := f'_\theta \in F'_\theta$ definiert man $\hat{\delta} \in \mathbb{F}$ durch

$$\hat{\delta}_0(i_0) := f'(i_0,\hat{\theta}_0(i_0)) \quad \text{und}$$

$$\hat{\delta}_m(i_0,i_1,z_1,\ldots,i_m,z_m) := f'(i_m,\hat{\theta}_m(i_0,a_0,\ldots,i_m,z_m))$$

für $m \geq 1$ und i_k, z_k, a_k wie in Satz 9.7.

Es gelte für $\theta_0 \in \Theta$, $i \in I$:

$$\hat{\theta}_m(X_0,X_1,Z_1,\ldots,X_m,Z_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} \theta_0 \qquad (P^i_{\theta_0,\hat{\delta}} \text{ - f.s.}) \; .$$

(a) Dann folgt unter der zusätzlichen Annahme $(L_{8,9})$: $\forall\theta_0 \in \Theta \quad \forall i \in I$

$$R(\theta_0) \geq g_{\theta_0} - \varepsilon \left(\inf_{f\in F} \Pi_{\theta_0,f}\, t_{\theta_0,f}\right)^{-1} \geq g_{\theta_0} - \varepsilon\eta^{-1} \qquad (P^i_{\theta_0,\hat{\delta}}\text{ - f.s.}) .$$

(b) $\forall\theta_0 \in \Theta \quad \forall i \in I$

$$W(\theta_0,\hat{\delta},i) \geq g_{\theta_0} - \varepsilon \left(\inf_{f\in F} \Pi_{\theta_0,f}\, t_{\theta_0,f}\right)^{-1} \geq g_{\theta_0} - \varepsilon\eta^{-1}.$$

Beweis:

Der Beweis verläuft ähnlich wie zu Satz 9.1. Seien $\theta_0 \in \Theta$, $i \in I$ und $\varepsilon \geq 0$ fest.

1. Mit Satz 9.6 (b) folgt $(\theta,f) \to \Phi_\theta(j,f(j))$ stetig.

2. Daraus folgt mit Satz 9.4

$$\theta \to F'_\theta \quad \text{m-vohs}$$

und mit Satz 9.3 (a) für alle $j \in I$

$$\theta \to \inf\{\Phi_{\theta_0}(j,f'(j)) \mid f' \in F'_\theta\} \quad \text{vuhs.}$$

3. Daher folgt für $k \in I$, $\theta_m := \hat{\theta}_m(X_0,\ldots,X_m,Z_m)$

$$0 \geq \varlimsup_m \Phi_{\theta_0}(X_m,f'_{\theta_m}(X_m))\chi_{\{X_m<k\}}$$

$$\geq \varlimsup_m \min_{j<k} \inf\{\Phi_{\theta_0}(j,f'(j)) \mid f' \in F'_{\theta_m}\}$$

$$\geq \min_{j<k} \inf\{\Phi_{\theta_0}(j,f'(j)) \mid f' \in F'_{\theta_0}\}$$

$$\geq -\varepsilon$$

und damit

$$\varlimsup_m |\Phi_{\theta_0}(X_m,f'_{\theta_m}(X_m))|\chi_{\{X_m<k\}} \leq \varepsilon .$$

4. Aus Lemma 9.2 folgt

$$\forall \bar{\varepsilon} > 0 \quad \exists k \in I \quad \overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} y_1(\theta_0, X_m) \chi_{\{X_m \geq k\}} < \bar{\varepsilon} \quad (P^i_{\theta_0, \hat{\delta}} - \text{f.s.})$$

bzw. die entsprechende Aussage für den Erwartungswert im Falle (b). Daher gilt für (a) die folgende Abschätzung: $\forall \bar{\varepsilon} > 0 \quad \exists k \in I$

$$\overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\Phi_{\theta_0}(X_m, f'_{\theta_m}(X_m)|$$

$$\leq \overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\Phi_{\theta_0}(X_m, f'_{\theta_m}(X_m))| \chi_{\{X_m < k\}} + \overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\Phi_{\theta_0}(X_m, f'_{\theta_m}(X_m))| \chi_{\{X_m \geq k\}}$$

$$\leq \varepsilon + \bar{\varepsilon} \cdot \hat{M}_{\theta_0} \qquad (P^i_{\theta_0, \hat{\delta}} - \text{f.s.}).$$

Die entsprechende Ungleichung folgt im Falle (b).

5. Für (a) folgt aus 4. wie in Satz 8.8 $P^i_{\theta_0, \hat{\delta}}$ - fast sicher:

$$\varepsilon \geq \overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} - \Phi_{\theta_0}(X_m, f'_{\theta_m}(X_m))$$

$$\geq \overline{\lim_N} \left\{ -\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (r_{\theta_0}(X_m, A_m) - g_{\theta_0} t_{\theta_0}(X_m, A_m)) \right.$$

$$\left. -\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{j \in I} q_{\theta_0}(j | X_m, A_m) v_{\theta_0}(j) - v_{\theta_0}(X_m) \right) \right\}$$

$$= -\overline{\lim_N} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} r_{\theta_0}(X_m, A_m) - g_{\theta_0} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} t_{\theta_0}(X_m, A_m) \right\},$$

daraus folgt aber mit (T):

$$-\varepsilon \overline{\lim_N} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} t_{\theta_0}(X_m, A_m) \right)^{-1} \leq \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} r_{\theta_0}(X_m, A_m)}{\sum_{m=0}^{N-1} t_{\theta_0}(X_m, A_m)} - g_{\theta_0} \quad (P^i_{\theta_0, \hat{\delta}} - \text{f.s.})$$

Mit Satz 8.9 folgert man

$$\overline{\lim_N} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} t_{\theta_0}(X_m, A_m) \right)^{-1} = \overline{\lim_N} \frac{\sum_{m=0}^{N-1} 1}{\sum_{m=0}^{N-1} t_{\theta_0}(X_m, A_m)}$$

$$\leq \sup_{f \in F} (\Pi_{\theta_0, f}\ t_{\theta_0, f})^{-1} \leq \eta^{-1} \qquad (P^i_{\theta_0, \hat{\delta}} \text{ - f.s.}).$$

Daraus folgt dann die Behauptung (a).

Der Beweis von (b) verläuft analog. ⌟

10.C Das Modell mit $H = \{i^*\}$

Mit Satz 4.2 und 6.1 folgt, daß, falls die Ljapunoff-Bedingungen für $H = \{i^*\}$ erfüllt sind, der Zustand i^* positiv rekurrent ist und $((X_m, P_{\theta,f})$ keine zwei disjunkten, abgeschlossenen Klassen besitzt, für alle $\theta \in \Theta$ und $f \in F$.

Der folgende Satz zeigt, daß bei kompaktem Θ auch eine Umkehrung dieser Aussage gilt:

Satz 10.6

Unter (C_{1-3}) (L_{1-9}) (I_1) und

(*) $\exists i^* \in H \quad \forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F \qquad i^*$ ist rekurrent unter $P_{\theta,f}$

gilt:
Die Bedingungen (L_{1-9}) sind mit $\tilde{H} = \{i^*\}$ erfüllbar.

Beweis:

(L) sei für $H \subset I$ und y_1, y_2, y_3, y_4 erfüllt.

1. Aus Lemma 5.4 (a), Satz, 5.5 (a) und 5.6 (a) folgt, daß die eingebettete Markoff-Kette $(\bar{X}_m)$ über H mit $\zeta = (\theta,f) \in \Theta \times F$ gerade die Voraussetzungen von Satz 2.5 (b) erfüllt.
   Mit der Bemerkung zu diesem Satz folgt also für $h,j \in H$

   $$(\theta,f) \to \sum_{m=0}^{\infty} i^* \bar{Q}^m_{\theta,f}(h,j) \text{ stetig.}$$

2. Mit Lemma 5.3 folgt daraus

   $$(\theta,f) \to E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(i^*)-1} |r_{\theta,f}(X_m)| \,|X_0 = i\right]$$

   $$= \overline{|r_{\theta,f}|}(i) + \sum_{h \in H \setminus \{i^*\}} Q_{\theta,f}(i,h) \sum_{j \in H} \sum_{n=0}^{\infty} i^* \bar{Q}^n_{\theta,f}(h,j) \overline{|r_{\theta,f}|}(j)$$

   stetig (mit Satz 5.6 (d)).

3. Daher gilt

   $$y_1'(\theta,i) := \sup_{f \in F} E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(i^*)-1} |r_{\theta,f}(X_m)| \,|X_0 = i\right] < \infty$$

und $\theta \to \tilde{y}_1'(\theta,i)$ stetig.
Entsprechend werden $\tilde{y}_1''$ und $\tilde{y}_1'''$ für t_θ bzw. 1 anstelle von $|r_\theta|$ definiert und erfüllen die entsprechenden Eigenschaften.

4. Mit Satz 4.2 und Lemma 4.1 folgt dann, daß $\tilde{H} = \{i^*\}$ und $\tilde{y}_1(\theta,i) := \tilde{y}_1'(\theta,i) + \tilde{y}_1''(\theta,i) + \tilde{y}_1'''(\theta,i)$ (L_1) und (L_2) erfüllen.

5. Aus 2. und 3. folgt

$$\tilde{y}_1'(\theta,i) \leq y_1(\theta,i) + \sup_{f\in F} \max_{j\in H} y_1(\theta,j) \sum_{h\in H\setminus\{i^*\}} Q_{\theta,f}(i,h) \cdot \bar{\mu}_{h,i^*}(\theta,f)$$

$$\leq y_1(\theta,i) + \max_{j\in H} y_1(\theta,j) \max_{h\in H} \sup_{f\in F} \bar{\mu}_{h,i^*}(\theta,f)$$

Aus der Gültigkeit von (L_2) für $y_1(\theta,\cdot)$ und Satz 2.5 (b) folgt jetzt

$$\theta \to y_1(\theta,i) + \tilde{M}_\theta \quad \text{stetig,}$$

mit $\tilde{M}_\theta := \max_{j\in H} y_1(\theta,j) \max_{h\in H} \sup_{f\in F} \bar{\mu}_{h,i^*}(\theta,f)$.
Mit Satz 2.3 (b) folgt aus der vorausgesetzten Gültigkeit von (L_3) für $y_1(\theta,\cdot)$ jetzt (L_3) für $\tilde{y}_1'(\theta,\cdot)$. Derselbe Schluß für $\tilde{y}_1''$ und $\tilde{y}_1'''$ zeigt, daß $\tilde{y}_1$ (L_3) erfüllt.

6. (L_4) folgt mit (L_5) (s.u.) aus Satz 2.4 (b).

7. Aus 5. folgt

$$E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(i^*)-1} \tilde{y}_1(\theta,X_m) \mid X_0 = i\right]$$

$$\leq E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(i^*)-1} 3 \cdot (y_1(\theta,X_m) + \tilde{M}_\theta) \mid X_0 = i\right].$$

Wie in Lemma 5.3 (a) folgt mit (L_5) für H und y_1, y_2:

$$E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(i^*)-1} y_1(\theta,X_m)|X_0 = i\right]$$

$$\leq y_2(\theta,i) + \max_{j\in I} y_2(\theta,j) \sum_{h\in H\setminus\{i^*\}} Q_{\theta,f}(i,h)\bar{\mu}_{h,i^*}(\theta,f)$$

und daher

$$\sup_{f\in F} E_{0,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(i^*)-1} \tilde{y}_1(\theta,X_m)|X_0 = i\right] =: \tilde{y}_2(\theta,i) < \infty.$$

Mit Satz 4.2 folgt jetzt, daß $\tilde{y}_2$ (L_5) mit $\tilde{H} = \{i^*\}$ erfüllt.

8. Mit 5. folgt auch

$$\tilde{y}_1(\theta,X_m)^2 \leq 9(y_1(\theta,X_m)^2 + \tilde{M}_\theta^2) \quad ,$$

daraus folgt wie in 7. aus der Gültigkeit von (L_8) für H und y_1, y_3 die Existenz von $\tilde{y}_3$, das (L_8) für $\tilde{H}$ erfüllt.
Ebenso folgt aus 7. die Existenz von $\tilde{y}_4$, das (L_9) erfüllt.
(L_6) zeigt man wie in 5.
(L_7) folgt aus (L_9).

Aus Satz 10.6 folgt, daß bei kompaktem Θ die beiden in Abschnitt 9 getrennt betrachteten Spezialfälle (I_2 oder $H = \{i^*\}$) zusammenfallen, da (I_2) die Bedingung (*) impliziert.

Für festes, "bekanntes" $\theta \in \Theta$ erhält man als Nebenergebnis, daß sich die Voraussetzungen aus [7] (d.h. H endliche Menge) auf die aus [15] (d.h. $H = \{i^*\}$) reduzieren, falls man zusätzlich die Existenz eines unter allen stationären Plänen rekurrenten Zustands $i^* \in H$ fordert. Andererseits wird deutlich, daß sich die Voraussetzungen aus [7] dadurch auszeichnen, daß sie zulassen, daß die positiv rekurrenten Klassen unter den verschiedenen stationären Plänen einen leeren Durchschnitt haben; stattdessen wird eine endliche Menge vorausgesetzt, deren Schnitt mit jeder positiv rekurrenten Klasse nicht-leer ist.

10.D Das Modell mit endlichem Zustandsraum

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß Satz 9.7 eine Verallgemeinerung der entsprechenden Aussagen (Theorem 8) aus Mandl [21] liefert.

In [21] wird ein Modell mit folgendem Voraussetzungen betrachtet:

(M) (M_1) I endlich ,
(M_2) $\forall i \in I$ D(i) kompakt (und reell) ,
(M_3) $\forall i,j \in I$ $(\theta,a) \to q_\theta(j|i,a)$, $r_\theta(i,a)$ stetig ,
(M_4) $\forall \theta \in \Theta$ $\forall f \in F$ $((X_m), P_{\theta,f})$ ist irreduzibel.

Satz 10.7

Unter (M) gelten (T),($C_{1,2}$),(L) und (I_2).

Beweis:

1. (T),($C_{1,2}$) und (I_2) sind offensichtlich erfüllt.

2. Für H := I und

$$y_1(\theta,i) := \sup_{a\in D(i)} |r_\theta(i,a)| + 2$$

gilt

$$|r_\theta(i,a)| + 1 + 1 + \sum_{j\in I\setminus H} q_\theta(j|i,a)y_1(\theta,j)$$

$$= |r_\theta(i,a)| + 2 \le y_1(\theta,i)$$

d.h. (L_1) ist erfüllt.

3. (L_2) folgt aus ($M_{2,3}$).

(L_3) folgt aus der Endlichkeit von I und (M_3), (L_2).

$\hat{P}^m_{\theta,f}$ ist die Nullmatrix, daher ist (L_4) erfüllt. $y_2(\theta,i) := y_1(\theta,i) + 1$ erfüllt (L_5),(L_6) und (L_7).
$y_3(\theta,i) := y_1(\theta,i)^2$ und $y_4(\theta,i) := y_2(\theta,i)^2$ erfüllen (L_8) und (L_9).

Bemerkung:

Satz 9.5 zeigt insbesondere, daß unter den Voraussetzungen (M) von Mandl gilt :

$$\theta \to \Phi_{\theta_0}(i, f_\theta(i)) \quad \text{stetig in } \theta_0.$$

Diese Aussage ist in Mandl's Hauptsatz ([21], Theorem 8) als zusätzliche Voraussetzung aufgenommen, auf die also nach dem oben gezeigten verzichtet werden kann. Dadurch wird die Nachprüfbarkeit der Voraussetzungen erheblich vereinfacht.

Die Voraussetzung über die Irreduzibilität (M_4) läßt sich noch abschwächen mit Hilfe des vorausgegangenen Abschnitts, wenn man Θ kompakt voraussetzt:

Seien (M^*_{1-3}) wie (M_{1-3}), und weiter

(M^*_4) $\exists i^* \in H \quad \forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F$

i^* ist positiv rekurrent unter $P_{\theta,f}$, und die Markoff-Kette $((X_m), P_{\theta,f})$ besitzt keine zwei disjunkten, abgeschlossenen Klassen.

(M^*_5) Θ kompakt.

Dann gilt :

Satz 10.8

Unter (M^*) gelten $(T), (C), (L)$ und (I_1) mit $H = \{i^*\}$.

Beweis:

1. Mit Satz 10.7 folgt aus (M^*_{1-3}) die Gültigkeit von (T) $(C_{1,2})$ und (L) mit $\tilde{H} = I$.
   Aus $(M^*_{4,5})$ folgt noch (C_3) und (I_1).

2. Mit Satz 10.6 folgt dann die Behauptung.

10.E Exzessive Funktionen

In [12] untersuchen v. Hee und Wessels die Bedeutung sogenannter "stark exzessiver Funktionen" für Markoff'sche Entscheidungsmodelle, dabei heißt $y: I \to (0,\infty)$ stark exzessiv

$$: \Leftrightarrow \exists \rho \in (0,1) \quad \forall P \quad \forall i \quad Py(i) \leq \rho\, y(i),$$

wobei P alle im jeweiligen Modell zulässigen Übergangsmatrizen durchläuft.

Für das hier untersuchte Semi-Markoff'sche Entscheidungsmodell läßt sich dieses Konzept in der folgenden Weise übertragen (in Verbindung mit (L_1)):

(SE) Es existiert $\rho \in (0,1)$, so daß für H und $\hat{P}_{\theta,f}$ aus (L_1):

$$\forall \theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad \forall i \in I \quad \hat{P}_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \leq \rho\, y_1(\theta,i) \ .$$

(SE) garantiert u.a. die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{m=0}^{N} \hat{P}^m_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)$ in (θ,f).

Satz 10.9

(a) Unter (L_1) ist (SE) erfüllt, falls gilt

$$\exists \rho \in (0,1) \quad \forall i \in I \quad \forall a \in D(i) \quad \forall \theta \in \Theta$$
$$|r_\theta(i,a)| + t_\theta(i,a) \geq (1-\rho) y_1(\theta,i)$$

(b) Es gilt

$$(L_{1,3'})\ (SE) \Rightarrow (L_{4\text{-}7}) \quad \text{und}$$
$$(L_{1,8})\ (SE) \Rightarrow (L_9) \ .$$

Beweis:

(a) (vgl. [12] Lemma 4 (a)). Sei wieder $\zeta = (\theta,f)$:

$$\text{aus} \qquad |r_\zeta| + t_\zeta + \hat{P}_\zeta\, y_1(\theta,\cdot) \leq y_1(\theta,\cdot) \text{ folgt}$$

$$(1 - \rho)y_1(\theta,\cdot) + \hat{P}_\zeta\, y_1(\theta,\cdot) \leq y_1(\theta,\cdot)$$

und

$$\hat{P}_\zeta\, y_1(\theta,\cdot) \leq \rho\, y_1(\theta,\cdot) .$$

(b) 1. Aus (SE) folgt unmittelbar für $m \geq 1$

$$\hat{p}^m_\zeta\, y_1(\theta,\cdot)(i) \leq \rho^m\, y_1(\theta,i)$$

und daher

$$\hat{P}^m_\zeta\, y_1(\theta,\cdot)(i) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \text{gleichmäßig in } \zeta \in \mathcal{Z} ,$$

d.h. (L_4) ist erfüllt.

2. Für $\zeta \in \mathcal{Z}$ und $i \in I$ folgt

$$y_1(\theta,i) + 1 + \hat{P}_\zeta \frac{2}{1-\rho}\, y_1(\theta,\cdot)(i)$$

$$\leq 2\, y_1(\theta,i) + \hat{P}_\zeta \frac{2}{1-\rho}\, y_1(\theta,\cdot)(i)$$

$$\leq 2\, y_1(\theta,i) + \rho \frac{2}{1-\rho}\, y_1(\theta,i) = \frac{2}{1-\rho}\, y_1(\theta,i) ,$$

d.h. $y_2(\theta,i) := \frac{2}{1-\rho}\, y_1(\theta,i)$ erfüllt (L_5).

Außerdem gilt

$$\hat{P}_\zeta\, y_2(\theta,\cdot) = \frac{2}{1-\rho}\, \hat{P}_\zeta\, y_1(\theta,\cdot)$$

$$\leq \rho \frac{2}{1-\rho}\, y_1(\theta,i)$$

$$= \rho\, y_2(\theta,i)$$

d.h. y_2 ist stark exzessiv.

3. (L_6) folgt unmittelbar aus (L_3').
(L_7) folgt aus der starken Exzessivität von y_2 wie in 1.

4. Wie in 2. zeigt man, daß

$$y_4(\theta,i) := \left(\frac{2}{1-\rho}\right)^2 y_3(\theta,i)$$

unter (L_8) die Voraussetzung (L_9) erfüllt. ⌟

Für beschränktes y_1 (und damit beschränktes r_θ und t_θ) bildet die starke Exzessivität (SE) eine gewisse Verallgemeinerung der folgenden Bedingung, die auch in [22] als Beispiel (für $H = \{i^*\}$) benutzt wird:

$$\forall\theta \in \Theta \quad \exists M \in \mathbb{R}_+^1 \quad \forall\rho \in (0,1) \quad \forall(i,a) \in K$$

$$|r_\theta(i,a)| + t_\theta(i,a) \leq M$$

$$q_\theta(H|i,a) \geq 1 - \rho$$

Dann folgt für $y_1(\theta,i) := \frac{M+1}{1-\rho}$

$$|r_\theta(i,a)| + t_\theta(i,a) + 1 + \hat{P}_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i)$$

$$\leq M + 1 + \frac{M+1}{1-\rho}\, q_\theta(I \setminus H|i,a)$$

$$\leq M + 1 + (M+1)\frac{\rho}{1-\rho}$$

$$= \frac{M+1}{1-\rho} = y_1(\theta,i)$$

und $\hat{P}_{\theta,f}\, y_1(\theta,\cdot)(i) \leq \frac{M+1}{1-\rho}\, q_\theta(I \setminus H|i,a) \leq \rho\, \frac{M+1}{1-\rho} = \rho\, y_1(\theta,i)$

d.h. (L_1) und (SE) sind erfüllt.

(L_8) wird dann von $y_3 := \frac{(M+1)^2}{(1-\rho)^2}$ erfüllt.

Aus Satz 10.9 (b) folgen dann $(L_{4-7,9})$. $(L_{2,3})$ sind erfüllt, falls M und ρ stetig von θ abhängen.

11. Ein Beispiel aus der Warteschlangentheorie

Als Beispiel für eine Anwendung der oben entwickelten Theorie soll jetzt ein kontrollierbares M/G/1-Warteschlangenmodell betrachtet werden. In diesem Modell dürfen Ankunftsrate und Bedienungszeitverteilung von Aktionen a und einem "unbekannten" Parameter θ abhängen. Außer den Verweilzeiten, das sind die Zeiten zwischen zwei Bedienungsbeendigungen, können auch die "reinen" Bedienungszeiten als Hilfsbeobachtung Y_m beobachtet werden. Der Warteraum ist abzählbar, die maximale Verkehrsintensität kleiner 1 und die Einschrittgewinnfunktion wird durch ein Polynom (beliebig großen) endlichen Grades beschränkt (bzw. Bem. zu Satz 11.3). Diese Annahme ermöglicht es, unter schwachen, zusätzlichen Voraussetzungen Beschränkungsfunktionen $y_1,\ldots,y_4$ zu konstruieren, die die Voraussetzungen $(L_{1\text{-}9})$ erfüllen. Dabei kann die Menge H (aus (L_1)) einelementig gewählt werden; darüberhinaus hängen die $y_1,\ldots,y_4$ nicht von $\theta \in \Theta$ ab.

Für den Fall, daß Ankunftsrate bzw. Bedienungszeitverteilung nicht zugleich von $a \in A$ und $\theta \in \Theta$ abhängen, können Schätzfunktionen für den unbekannten Parameter angegeben werden, die den Voraussetzungen von Satz 9.1 genügen.

Das Beispiel bildet eine Verallgemeinerung des Beispiels 2.2 aus [16]. Dort werden, ohne "unbekannten" Parameter, die Ljapunoff-Bedingungen lediglich zum Nachweis der Existenz (θ-) optimaler, stationärer Pläne benutzt.

11.A Das Warteschlangenmodell

Das Semi-Markoff'sche Entscheidungsmodell aus Abschnitt 1 wird nun durch die Vorgabe einer Bedienungszeitverteilung und einer Ankunftsrate näher spezifiziert.

Sei $p: \Theta \times A \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^1_+)$, so daß für $\theta \in \Theta$

$$(a,B) \to p(B|\theta,a) \qquad \text{OW;}$$

und $\lambda: \Theta \times A \to (0,\infty)$, so daß für $\theta \in \Theta$

$$a \to \lambda(\theta,a) \text{ meßbar.}$$

Mit Hilfe dieser beiden Größen läßt sich nun ein SMEM mit einem Übergangskern Q_θ definieren, der durch die Einbeziehung der Hilfsbeobachtung (der Bedienungszeit) allerdings etwas komplizierter ist als etwa bei Çinlar [5], S. 317:

Es sei $I = \{0,1,2,\ldots\} = \mathbb{N}_0$,

A,Θ wie vorher,

$Y := \mathbb{R}^1_+$ und daher $Z := \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+$,

$r_\theta(i,a)$ wie vorher.

Für $\theta \in \Theta$, t_1, $t_2 \in \mathbb{R}^1_+$, $i,j \in I$, $a \in D(i)$ definiert man für $i > 0$

$$Q_\theta(j,[0,t_1],[0,t_2]|i,a) :=$$

$$:= \begin{cases} 0 & \text{, für } j < i-1 \\ \int_0^{\min(t_1,t_2)} \exp(-\lambda(\theta,a)s) \frac{(\lambda(\theta,a)s)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} p(ds|\theta,a) & \text{, sonst} \end{cases},$$

und für $i = 0$

$$Q_\theta(j,[0,t_1],[0,t_2]|0,a) :=$$

$$\int_0^{\min(t_1,t_2)} \lambda(\theta,a)\exp(-\lambda(\theta,a)(s+2(t_2-t_1)^+))\ Q_\theta(j,[0,\infty),[0,\min(t_1,t_2)-s]|1,a)\lambda_1(ds$$

dabei bezeichne λ_1 das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^1,\mathcal{B}^1)$.

Für $i > 0$ folgt also

$$Q_\theta(j,[0,t_1],[0,t_2]|i,a) = Q_\theta(j,[0,\min(t_1,t_2)],[0,\min(t_1,t_2)]|i,a),$$

das entspricht der (unten erläuterten) Anschauung, daß bei nicht-leerem Warteraum Bedienungs- und Verweilzeit übereinstimmen. Für $t_1 \geq t_2$, insbesondere für $t_2 = \infty$ ergeben sich für alle $i \in I$ die üblichen Übergangskerne (vgl. [5]); bei Nichtberücksichtigung der Hilfsbeobachtung erhält man also ein SMEM im strengen Sinne. Es sei noch $Q_\theta(j,[0,t]|i,a) := Q_\theta(j,[0,t],[0,t]|i,a)$ für $i > 0$.

Für die Größen q_θ und t_θ ergibt sich damit

$$q_\theta(j|i,a) = Q_\theta(j,[0,\infty)|i,a) =$$

$$= \begin{cases} 0 & , j < i-1 \\ \int_0^\infty \exp(-\lambda(\theta,a)t') \frac{(\lambda(\theta,a)t')^{j-i+1}}{(j-i+1)!}\, p(dt'|\theta,a) & , \text{sonst} \end{cases}$$

für $i > 0$: und für $i = 0$:

$$q_\theta(j|0,a) = Q_\theta(j,[0,\infty),[0,\infty)|0,a) =$$

$$= \int_0^\infty \lambda(\theta,a) \exp(-\lambda(\theta,a)s)\ \ Q_\theta(j,[0,\infty)|1,a)\lambda_1(ds)$$

$$= q_\theta(j|1,a) \qquad (\text{mit } (\infty-\infty)^+ := 0).$$

$$t_\theta(i,a) = \int_0^\infty t\, Q_\theta(j,dt|i,a)$$

$$= \int_0^\infty t\, p(dt|\theta,a) \quad \text{für } i > 0 \quad :$$

und

$$t_\theta(0,a) = \sum_{j\in I} \int_0^\infty t\, Q_\theta(j,[0,\infty),dt|0,a)$$

$$= \frac{1}{\lambda(\theta,a)} + \int_0^\infty t\, p(dt|\theta,a)$$

da $Q_\theta(I,[0,\infty),\cdot|0,a)$ aus der Faltung der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda(\theta,a)$ und der Verteilung $Q_\theta(I,\cdot|1,a)$ besteht.

Seien X_m, A_m, Y_m, T_m wie vorher definiert, dann läßt sich das Semi-Markoff'sche-Entscheidungsmodell mitdem oben beschriebenen speziellen Q als ein M/G/1-Wartesystem interpretieren, bei dem Steuerungsaktionen ergriffen werden können, wenn eine Bedienung abgeschlossen ist.

In der Terminologie der Warteschlangen beschreibt I dabei den Warteraum, X_m ist die Anzahl der wartenden Kunden zum Zeitpunkt $\sum_{k=1}^{m} T_k$, d.h. zur Zeit der m-ten Bedienungsbeendigung. Wird nun die Aktion A_m ergriffen, so fällt der Gewinn $r_\theta(X_m,A_m)$ an, falls θ der zugrundeliegende (unbekannte) Parameter ist. T_{m+1} beschreibt die Zeit bis zur nächsten Bedienungsbeendigung. Ist der Warteraum zur Zeit $\sum_{k=1}^{m} T_k$ leer, so besteht T_{m+1} aus einer Leerlaufzeit, während der auf das Eintreffen des nächsten Kunden gewartet wird,und der dann beginnenden Bedienungszeit Y_{m+1} dieses Kunden; ist der Warteraum nicht leer, so gilt $T_{m+1} = Y_{m+1}$. Y_{m+1} ist gemäß $p(\cdot|\theta,A_m)$ verteilt. Die Ankünfte in den Warteraum zwischen der m-ten und (m+1)-sten Bedienungsbeendigung bilden einen Poisson-Prozeß mit Parameter $\lambda(\theta,A_m)$. Die Wahl der Aktionen A_m darf von den vorangegangenen Leerlauf- und Bedienungszeiten $_0,\ldots,_m$ und dem "Verlauf der Warteschlange" $X_0,\ldots,X_m$ abhängen. (Vgl. zu dieser Einbettung des M/G/1-Modells in das Semi-Markoff-Modell [5], S. 317 ff.).

Ziel ist es, durch geeignete Auswahl der A_m, den (erwarteten) Durchschnittsgewinn zu maximieren (bzw.,indem man $-r_\theta$ betrachtet, die durchschnittlichen Wartekosten zu minimieren).

Damit für das so definierte Modell die Sätze aus Abschnitt 9 anwendbar sind, müssen eine Reihe von Bedingungen erfüllt sein.

Dabei werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\nu_m(\theta,a) := \int_0^\infty t^m \, p(dt|\theta,a) \qquad \text{und}$$
$$\rho_m(\theta,a) := \nu_m(\theta,a) \cdot \lambda(\theta,a)^m, \quad \text{für } m \geq 0,\ \theta \in \Theta,\ a \in A.$$

(W_1) $\forall i \in I$ $D(i)$ kompakt, Θ kompakt ,

(W_2) $\forall i \in I$ $(\theta,a) \to r_\theta(i,a)$ stetig ,

(W_3) $\exists M \in \mathbb{R}_+^1$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall \theta \in \Theta$ $\forall (i,a) \in K$ $|r_\theta(i,a)| \leq M + M\, i^N$,

(W_4) $(\theta,a) \to \lambda(\theta,a)$ stetig ,

(W_5) $\exists \underline{\lambda}, \overline{\lambda}$ $\forall \theta \in \Theta$ $\forall a \in A$ $0 < \underline{\lambda} \leq \lambda(\theta,a) \leq \overline{\lambda} < \infty$,

(W_6) $(\theta,a) \to p(\cdot|\theta,a)$ stetig bzgl. der schwachen Topologie auf $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^1)$,

(W_7) $\exists G \in \mathbb{R}_+^1$ $\forall \theta \in \Theta$ $\forall a \in A$ $\nu_{2N+5}(\theta,a) \leq G < \infty$ (N aus (W_3)) ,

(W_8) $\underline{\nu} := \inf \{\nu_1(\theta,a) | \theta \in \Theta,\ a \in A\} > 0$,

(W_9) $\sup \{\rho_1(\theta,a) | \theta \in \Theta,\ a \in A\} < 1$.

Bemerkung:

1. $(W_{1,2})$ fassen nur die entsprechenden Bedingungen aus $(C_{1,2})$ zusammen.
2. $(W_{5,7})$ garantieren u.a. die Beschränktheit von $\rho_m(\theta,a)$ für $m = 0,\ldots,2N + 5$ (vgl. Lemma 11.2).
3. Durch eine geringe Erweiterung folgt aus Vogel [31] S. 283 mit $(W_{6,7})$:

   $$\forall m \leq 2N + 5 \quad (\theta,a) \to \nu_m(\theta,a) \text{ stetig (und beschränkt).}$$

   Diese Aussage wird im folgenden ausführlich benutzt.
4. Die Kompaktheit von Θ in (W_1) wird nur für den Nachweis von (L_4) in Satz 11.3 benötigt.

Im folgenden wird $\zeta = (\theta,a)$ und $\mathcal{Z} = \Theta \times A$ gesetzt;

$i_{(n)}$ ist die n-te Faktorielle von i; $i,n \in \mathbb{N}$, es gilt

$$i_{(n)} = \prod_{m=0}^{n-1} (i - m) = \frac{i!}{(i-n)!} \chi_{\{i \geq n\}} = \binom{i}{n} n!$$

Weiter sei für $n \geq 0$, $\zeta \in \mathcal{Z}$

$$B_n(\zeta) := \int_0^\infty \exp(-\lambda(\zeta)t) \frac{(\lambda(\zeta)t)^n}{n!} p(dt|\zeta) \quad .$$

11.B Die (C)- und (L)-Bedingungen

Die Voraussetzungen (W) implizieren die Gültigkeit von (T), $(C_{1,2})$, (L_{1-9}) und (I_1) mit $H = \{0\}$.
Dazu zunächst:

Lemma 11.1

$$(W_{1,2,4,6-8}) \Rightarrow (T),\ (C_{1-3})$$

Beweis:

1. $t_\theta(i,a) = \begin{cases} \lambda(\zeta)^{-1} + \nu_1(\zeta) & , i = 0 \\ \nu_1(\zeta) & , i > 0 \end{cases} \geq \underline{\nu} > 0$, nach (W_8).
2. $(C_{1,3})$ entsprechend (W_1).
3. Aus $(W_{4,6,7})$ folgt $(\theta,a) \to t_\theta(i,a)$ stetig, mit (W_4) folgt:

$$(\theta,a) \to \exp(-\lambda(\theta,a)t)\,\frac{(\lambda(\theta,a)t)^n}{n!}$$

ist stetig und durch 1 beschränkt, daher folgt aus (W_6)

$$(\theta,a) \to B_n(\theta,a) \text{ stetig.}$$

Mit (W_2) folgt schließlich: (C_2) ist erfüllt. ∎

Das folgende Lemma wird für den Nachweis der (L)-Bedingungen benötigt; der Beweis ist eine Vereinfachung von Beispiel 2.2 aus [16].

Lemma 11.2

Unter $(W_{5,7,9})$ gilt für das N aus (W_7):
für $n = 0,\ldots,2N+4$ gibt es $u_n : I \to \mathbb{R}_+^I$ und für $n = 0,\ldots,2N+5$ gibt es $d_n \in (0,\infty)$, so daß für alle $n = 0,\ldots,2N+4$ gilt:

(a) $\forall\theta \in \Theta \quad \forall(i,a) \in K$

$$i_{(n)} + \sum_{j=1}^{\infty} q_\theta(j|i,a)u_n(j) \leq u_n(i) \quad ,$$

(b) für $i \neq 0$:

$$u_n(i) \leq \sum_{m=0}^{n+1} d_m \, i_{(m)}$$

Beweis:

Der Beweis wird mittels einiger Hilfsbehauptungen geführt, deren kombinatorische Beweise hier meist weggelassen werden.

Sei dazu $\zeta = (\theta,a)$ und $\bar{N} := 2N + 5$

1. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m=n}^{\infty} m_{(n)} \, B_m(\zeta) = \rho_n(\zeta)$$

2. Für $i > 0$ und $1 \leq n \leq \bar{N}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_\theta(j|i,a) j_{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \rho_m^*(\zeta) i_{(n-m)}$$

wobei $\rho_0^*(\zeta) := 1$ und

$$\rho_n^*(\zeta) := \rho_n(\zeta) - n \, \rho_{n-1}^*(\zeta) \quad (n \leq \bar{N})$$

gesetzt wird.

3. Es gilt (für $1 \leq n \leq \bar{N}$)

$$\rho_n^*(\zeta) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \frac{n!}{m!} \rho_m(\zeta)$$

und daher mit $(W_{5,7})$

$$\hat{\rho}_n := \sup_{\zeta \in} |\rho_n^*(\zeta)| \leq n! \sum_{m=0}^{n} \sup_{\zeta \in \mathfrak{Z}} \rho_m(\zeta) < \infty.$$

Sei noch

$$\tilde{\rho} := (1 - \sup_{\zeta \in \mathfrak{Z}} \rho_1(\zeta))^{-1} \quad .$$

Aus (W_9) folgt $\tilde{\rho} < \infty$.

4. Die Funktionen u_n $(n = 0,\ldots,\bar{N}-1)$ lassen sich jetzt folgendermaßen definieren:

$$u_0(i) := \begin{cases} \tilde{\rho} & , \ i = 0 \\ \tilde{\rho} i & , \ i > 0 \end{cases}$$

und für $n \leq \bar{N}-2$

$$u_{n+1}(i) := \begin{cases} u_{n+1}(1) & , \ i = 0 \\ \frac{\tilde{\rho}}{n+2} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n+2}{m} \hat{\rho}_{n+2-m} \, u_m(i) + i_{(n+2)} \right) & , \ i > 0 \end{cases} .$$

Der Beweis von (a) folgt jetzt durch vollständige Induktion nach $n \leq \bar{N}-1$:

Für $n = 0$ folgt die Behauptung aus 2. und $\tilde{\rho} \, \rho_1^*(\zeta) \leq -1$; für den Schluß von n auf $n+1$ $(n \leq \bar{N}-2)$ gilt

$$i_{(n+1)} + \sum_{j=1}^{\infty} q_\theta(j|i,a) u_{n+1}(j)$$

$$= i_{(n+1)} + \frac{\tilde{\rho}}{n+2} \left[\sum_{m=0}^{n} \binom{n+2}{m} \hat{\rho}_{n+2-m} \sum_{j=1}^{\infty} q_\theta(j|i,a) u_m(j) \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{n+2} \binom{n+2}{m} \rho^*_{n+2-m}(\zeta) i_{(m)} \right] \qquad \text{(mit 2.)}$$

$$\leq i_{(n+1)} + \frac{\tilde{\rho}}{n+2} \left[\sum_{m=0}^{n} \binom{n+2}{m} \hat{\rho}_{n+2-m} \, u_m(i) + i_{(n+2)} + (n+2) \rho_1^*(\zeta) i_{(n+1)} \right]$$

(Ind. Vor.)

$$= i_{(n+1)} + \tilde{\rho} \, \rho_1^*(\zeta) i_{(n+1)} + u_{n+1}(i)$$

$$\leq u_{n+1}(i)$$

5. Für den Beweis von (b) zeigt man zunächst:
für $n = 0,\ldots,\bar{N}-1$; $m = 0,\ldots,n+1$ gibt es $d_{n,m} \in (0,\infty)$, so daß:

$$u_n(i) \leq \sum_{m=0}^{n+1} d_{n,m} \, i_{(m)} \qquad \text{für } i > 0.$$

Der Beweis dieser Behauptung folgt mit vollständiger Induktion nach $n \leq \tilde{N}$. (b) wird dann erfüllt von

$$d_0 := \max \{d_{n,0} | n = 0,\ldots,\tilde{N}-1\}$$
$$d_m := \max \{d_{n,m} | n = m-1,\ldots,\tilde{N}-1\} \quad , m \leq \tilde{N} .$$

Aus den u_n, $u = 0,\ldots,2N+4$ lassen sich jetzt Beschränkungsfunktionen $y_1,\ldots,y_4$ konstruieren, die nicht von $\theta \in \Theta$ abhängen:

Satz 11.3

Unter (W_{1-9}) gilt:

Es gilt $y_1,y_2,y_3,y_4: I \to \mathbb{R}_+^1$, so daß (L_{1-9}) und (I_1) mit $H := \{0\}$ erfüllt sind.

Beweis:

1. Für $t \in \mathbb{R}_+^1$, $n \geq 0$ gilt

$$t_{(n)} = \sum_{m=0}^{n} s(n,m)t^m \qquad \text{und}$$

$$t^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m)t_{(m)}$$

dabei sind $s(n,m)$ bzw. $S(n,m)$ die Stirling'schen Zahlen erster bzw. zweiter Art. (vgl. [25] S. 33).

2. Aus $(W_{5,7})$ folgt für $\theta \in \Theta$, $(i,a) \in K$

$$t_\theta(i,a) \leq \lambda(\theta,a)^{-1} + \nu_1(\theta,a)$$
$$\leq \underline{\lambda}^{-1} + G + 1 =: \tilde{G} < \infty$$

und daher

$$|r_\theta(i,a)| + t_\theta(i,a) + 1 \leq M + \tilde{G} + 1 + Mi^N$$
$$\leq M + \tilde{G} + 1 + M \sum_{m=0}^{N} S(N,m)\, i_{(m)}$$

$$\leq \sum_{m=0}^{N} c_m \, i_{(m)} \quad , \text{ für } c_m \geq 0 \text{ geeignet .}$$

Es sei jetzt

$$y_1(i) := \sum_{m=0}^{N} c_m \, u_m(i) \quad , \; u_m \text{ aus Lemma 11.2 ,}$$

dann gilt

$$|r_\theta(i,a)| + t_\theta(i,a) + 1 + \sum_{j \in I \setminus \{0\}} q_\theta(j|i,a) y_1(j)$$

$$\leq \sum_{m=0}^{N} c_m \Big(i_{(m)} + \sum_{j=1}^{\infty} q_\theta(j|i,a) u_m(j) \Big)$$

$$\leq \sum_{m=0}^{N} c_m \, u_m(i)$$

$$= y_1(i)$$

damit sind $(L_{1,2})$ mit $H := \{0\}$ erfüllt.

3. Für die Gültigkeit von (L_3) genügt es zu zeigen :

$$(\theta,a) \to \sum_{j=1}^{\infty} q_\theta(j|i,a) u_m(j) \quad \text{stetig} \quad \text{für } m = 0,\ldots,N.$$

Das folgt mit vollständiger Induktion nach $n \leq N$ aus $(\theta,a) \to \rho_m^*(\theta,a)$ stetig und 2. aus Lemma 11.2

4. (L_4') folgt aus (L_5) (s.u.), mit (W_1) folgt aus Satz 2.4 (b) dann (L_4).

5. Mit Lemma 11.2 (b) folgt

$$y_1(i) + 1 \leq \sum_{k=0}^{N+1} b_k \, i_{(k)} \quad \text{für } b_k \geq 0 \text{ geeignet,}$$

daher folgt für

$$y_2(i) := \sum_{k=0}^{N+1} b_k \, u_k(i)$$

die Gültigkeit von (L_5) wie in 2.

6. (L_6) folgt jetzt wie in 3.; (L_7) folgt aus (L_9) (s.u.).

7. Aus der Definition von y_1 folgt wieder mit Lemma 11.2 (b) und 1.:

$$(y_1(i))^2 \leq \sum_{m=0}^{2N+2} \tilde{b}_m \, i_{(m)}$$

für geeignete $\tilde{b}_m \geq 0$.

Daher erfüllt $y_3(i) := \sum_{m=0}^{2N+2} \tilde{b}_m \, u_m(i)$ die Bedingung (L_8).

9. Ebenso folgt

$$(y_2(i))^2 \leq \sum_{m=0}^{2N+4} \hat{b}_m \, i_{(m)}$$

für $\hat{b}_m \geq 0$ geeignet, und $y_4(i) := \sum_{m=0}^{2N+4} \hat{b}_m \, u_m(i)$ erfüllt (L_9).

10. (I_1) folgt mit Bem. 2 zu Satz 6.1 aus (L_1) und $H = \{0\}$. ⌟

Bemerkung:

In [8] betrachtet Gallisch ein Warteschlangenmodell mit "langsamster" Bedienuntszeitverteilung, d.h. übertragen auf das vorliegende Modell

$$\forall\theta \in \Theta \quad \exists\bar{a} \in A \quad \forall a \in A \quad p(\cdot|\theta,\bar{a}) \text{ ist stochastisch größer als } p(\cdot|\theta,a).$$

Es kann gezeigt werden, daß dann die Ljapunoff-Bedingungen auch für eine exponentiell beschränkte Gewinnfunktion erfüllbar sind.

Sei dazu $\psi_{\theta,a}(s) := \int \exp(-st)p(dt|\theta,a)$ die Laplace-Transformierte von $p(\cdot|\theta,a)$. Dann wird statt $(W_{3,7})$ gefordert:

$\exists\sigma > 1 \quad \forall\theta \in \Theta \quad \forall a \in A \quad \psi_{\theta,a}((1-\sigma)\lambda(\theta,a)) < \sigma$ und

$\forall\theta \in \Theta \quad \forall(i,\mathbf{a}) \in K \quad |r_\theta(i,a)| \leq (\frac{\sigma}{\varepsilon_0})^{i+1}$, wobei $\varepsilon_0 := 3^{1/3}$.

Aus [8], Lemma 4.9 folgt dann für $\theta \in \Theta$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^1 \quad \forall i \geq 1 \quad \sup_{f \in F} E_{\theta,f}\left[\sum_{m=0}^{\tau_1(0)-1} |r_\theta(X_m, A_m)| \,|\, X_0 = i\right] \leq \alpha\, \sigma^i,$$

daraus kann mit Satz 4.2 auf die Gültigkeit von (L_1) geschlossen werden. Zugleich wird aus der Schranke $\alpha\sigma^i$ deutlich, wie durch weitere Forderungen an die Laplace-Transformierte auch die Gültigkeit von $(L_{5,8,9})$ sichergestellt werden kann.

Für die Konstruktion eines optimalen Plans $\hat{\delta}$ gemäß Satz 9.7 besteht jetzt nur noch das Problem, eine passende Schätzfunktion zu finden.

In den folgenden beiden Spezialfällen des Warteschlangenmodells ergeben sich geeignete Schätzfunktionen aus der speziellen Struktur der Warteschlangen. Dabei sind beide Fälle so gewählt, daß Optimierung und Schätzung voneinander "getrennt" sind, d.h. daß λ bzw. ν_1 nicht zugleich von a (dem zu steuernden Parameter) und θ (dem zu schätzenden Parameter) abhängen.

Für den allgemeineren Fall werden hinreichende Bedingungen in Abschnitt 12 abgeleitet.

11.C Steuerbarer Ankunftsstrom, unbekannte Bedienungszeitverteilung

Als Spezialfall des M/G/1-Warteschlangenmodells wird nun ein Modell betrachtet, in dem die Ankunftsrate $\lambda(a)$ nicht von $\theta \in \Theta$ und die Bedienungszeitverteilung $p_\theta = p(\cdot|\theta)$ nicht von $a \in A$ abhängt.

Die Bedienungszeiten (Y_m) sind dann unabhängig, identisch p_θ-verteilt; es lassen sich daher Bedingungen angeben für die Existenz eines stark konsistenten Maximumlikelihood-Schätzers $\bar{\theta}_m(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)$, z.B. Pfanzagl [23], 2.6 Theorem.

$\hat{\theta}_m(X_0,A_0,\ldots,X_m,Z_m) := \bar{\theta}_m(Y_1,\ldots,Y_m)$ bildet dann einen Schätzer, der unter allen Plänen stark konsistent ist, und daher insbesondere die Voraussetzung von Satz 9.7 erfüllt.

Für die Konstruktion dieses Schätzers ist die Einbeziehung der Bedienungszeiten als zusätzliche Beobachtung besonders nützlich. In einfachen Semi-Markoff-Modellen stehen als Daten nur die Verweilzeiten T_m (und die Zustände und Aktionen) zur Verfügung, wobei T_m für $X_{m-1} \neq 0$ nicht nur die Bedienungszeit sondern auch die Leerlaufzeit enthält.

Mit geeigneten Stoppfunktionen σ_n können die ("diskreten") Zeitpunkte mit $X_{m-1} \neq 0$ ausgesondert werden. Es gilt dann $\sigma_n \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$ und $(T_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist unabhängig, identisch $p(\cdot|\theta)$-verteilt, daher kann man auf (T_{σ_n}) (als Teilfolge von (Y_n)) z.B. wieder die Maximumlikelihood-Methode anwenden;

$$\hat{\theta}_n(X_0,A_0,\ldots,X_m,Z_m) := \bar{\theta}_m(T_{\sigma_1},\ldots,T_{\sigma_m})$$

liefert dann einen konsistenten Schätzer für θ, der nur von den Verweilzeiten (T_m) und den Zuständen (X_m) abhängt.

Dieser Schätzer liefert daher mit Satz 9.7 einen Plan $\hat{\delta}$ der auch im einfachen Semi-Markoff-Modell (mit einelementigem Y) zulässig ist.

Falls die Bedienungszeitverteilungen durch ihren Erwartungswert parametrisiert sind, d.h. falls gilt

$$\theta = \int_0 t\, p(dt|\theta) = \nu_1(\theta)$$

läßt sich ein Schätzer, der nur von X_m, A_m, T_m abhängt, folgendermaßen angeben:

Satz 11.4

Unter (W_{1-9}) gilt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$:

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (T_{m+1} - \chi_{\{X_m=0\}}\lambda(A_m)) = \nu_1(\theta) \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{- f.s.}) \ .$$

Beweis:

1. Es gilt

$$E_{\theta,\delta}\,[T^2_{m+1}|X_m,A_m] \leq \begin{cases} 3\,\dfrac{2}{\lambda(A_m)^2} + 3\nu_2(\theta) & , \quad X_m = 0 \\ \nu_2(\theta) & , \quad X_m \neq 0 \end{cases}$$

$$\leq \text{const} < \infty$$

ν_1 kann daher in Satz 11.3 o.E. so gewählt werden, daß (B_2) aus Abschnitt 10.A erfüllt ist.

2. Wie in Lemma 10.1 zeigt man dann:

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (T_{m+1} - \chi_{\{X_m=0\}}\lambda(A_m)^{-1} - t_\theta(X_m,A_m) + \chi_{\{X_m=0\}}\lambda(A_m)^{-1})$$

$$= \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (T_{m+1} - t_\theta(X_m,A_m)) = 0 \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{- f.s.}),$$

und daher

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (T_{m+1} - \chi_{\{X_m=0\}}\lambda(A_m)^{-1})$$

$$= \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (t_\theta(X_m,A_m) - \chi_{\{X_m=0\}}\lambda(A_m)^{-1})$$

$$= \lim_N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \nu_1(\theta)$$

$$= \nu_1(\theta),$$

$$\text{da } t_\theta(X_m, A_m) = \begin{cases} \lambda(A_m)^{-1} + \nu_1(\theta) & , \ X_m = 0 \\ \nu_1(\theta) & , \ X_m \neq 0 \end{cases} .$$

Die angegebene Funktion ist also stark konsistent unter allen Plänen. ⌟

Da die Schätzfunktion nicht von Hilfsbeobachtungen abhängt, ist der zugehörige optimale Plan zulässig in dem einfachen Semi-Markoff-Modell mit $Y = \{\bar{y}\}$.

11.D Steuerbare Bedienungszeitverteilung, unbekannte Ankunftsrate

Es wird jetzt der zu 11.C komplementäre Fall betrachtet:

$\lambda = \lambda(\theta)$ sei unabhängig von $a \in A$ und

$p = p(\cdot|a)$ sei unabhängig von $\theta \in \Theta$.

In diesem Fall lassen sich Schätzer für $\lambda(\theta)$ angeben (die für $\theta \to \lambda(\theta)$ injektiv auch Schätzer für θ sind).

Als erstes wird der Schätzer "Ankünfte pro Zeit" betrachtet. Der Konsistenzbeweis wird sehr anschaulich, wenn man dabei auf den zugrundeliegenden Poisson-Ankunftsstrom zurückgreifen kann.
Bei der hier benutzten Einbettung der Warteschlange (vgl. 11.A) wurde der Poissonprozeß nicht explizit vorausgesetzt, er ist nur implizit, sozusagen ausschnittweise, in dem Übergangskern Q_θ enthalten.

Der folgende Konsistenzbeweis wird daher ohne Rückgriff auf den Poissonprozeß nur im Rahmen des einfachen Semi-Markoff-Modells (ohne Hilfsbeobachtung) geführt. Der Beweis mit Hilfe des Poissonprozeßes ist in der Bemerkung danach angedeutet.

Satz 11.5

Unter $(W_{1\text{-}9})$ gilt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$

$$\frac{X_n + n}{\sum_{m=1}^{n} T_m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(\theta) \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{ - f.s.}) .$$

Beweis:

1. Für y_1 wie in Satz 11.3 gilt für $j \in I$ $\quad j+1 \le y_1(\theta,j)$ und daher ist (B_1) für $\tilde{r}_\theta(j,a,k,z) := k - j + 1$ erfüllt.

2. Für diese Gewinnfunktion gilt:

$$\hat{r}_\theta(X_m,A_m) = E_{\theta,\delta}\left[X_{m+1} - X_m + 1 | X_m, A_m\right]$$

$$= E_{\theta,\delta}\left[E_{\theta,\delta}\left[X_{m+1} - X_m + 1 | X_m, A_m, T_{m+1}\right] | X_m, A_m\right]$$

$$= E_{\theta,\delta}\left[\sum_{j=0}^{\infty} j \exp(-\lambda(\theta)T_{m+1}) \frac{(\lambda(\theta)T_{m+1})^j}{j!} \Big| X_m, A_m\right]$$

$$= E_{\theta,\delta}\left[\lambda(\theta)T_{m+1} | X_m, A_m\right]$$

$$\leq \lambda(\theta)\left(\lambda(\theta)^{-1} + \max_{a\in A} \nu_1(a)\right)$$

$$\leq 1 + \max_{a\in A} \lambda(\theta)\nu_1(a)$$

$$\leq 2$$

d.h. die Funktion $\hat{r}_\theta$ erfüllt die (L)-Bedingungen.

3. $E_{\theta,\delta}\left[T_{m+1}^2 | X_m = i, A_m = a\right] \leq \begin{cases} 6\lambda(a)^{-1} + 3\nu_2(a) & , i = 0 \\ \nu_2(a) & , i > 0 \end{cases}$

$$\leq \text{const} < \infty,$$

daher ist (B_2) erfüllt.

4. Mit Satz 10.2 (b) folgt jetzt $P_{\theta,\delta}^i$ -fast sicher:

$$\overline{\lim_n} \frac{X_n - X_0 + n}{\sum_{m=0}^{n-1} T_{m+1}} = \overline{\lim_n} \frac{\sum_{m=0}^{n-1} (X_{m+1} - X_m + 1)}{\sum_{m=0}^{n-1} T_{m+1}}$$

$$= \overline{\lim_n} \frac{\sum_{m=0}^{n-1} E_{\theta,\delta}[X_{m+1} - X_m + 1 | X_m, A_m]}{\sum_{m=0}^{n-1} E_{\theta,\delta}[T_{m+1} | X_m, A_m]}$$

$$= \overline{\lim_n} \frac{\sum_{m=0}^{n-1} \lambda(\theta)\, E_{\theta,\delta}[T_{m+1} | X_m, A_m]}{\sum_{m=0}^{n-1} E_{\theta,\delta}[T_{m+1} | X_m, A_m]}$$

$$= \lambda(\theta) \ .$$

Ebenso folgt

$$\overline{\lim_n} \frac{-(X_n - X_0 + n)}{\sum_{m=0}^{n-1} T_{m+1}} = -\lambda(\theta) \qquad (P^i_{\theta,\delta} - \text{f.s.}) \ ,$$

und daher

$$\lim_n \frac{X_n - X_0 + n}{\sum_{m=0}^{n-1} T_{m+1}} = \lim_n \frac{X_n + n}{\sum_{m=1}^{n} T_m} = \lambda(\theta) \qquad (P^i_{\theta,\delta} - \text{f.s.}) \ ,$$

da nach Lemma 10.1 (b) aus (B_2) folgt:

$$\frac{X_0}{\sum_{m=0}^{n-1} T_{m+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (P^i_{\theta,\delta} - \text{f.s.}) \ .$$

Bemerkung:

Wird bei der Einbettung des Warteschlangenmodells in das Semi-Markoff-Modell der Poisson-Ankunftsstrom und die Bedienungszeitverteilung vorgegeben, so definiert man auf dem gegebenen W-Raum die Zustandsvariable $X_n := N(\sum_{m=1}^{n} T_m) + X_0 - n$

dabei beschreibt N(t) die Anzahl der Ankünfte im Poisson-Prozeß bis zum (stetigen) Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+^1$.

Dann gilt insbesondere $\sum_{m=1}^{n} T_m \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$, da andernfalls ∞-viele Bedienungen in endlicher Zeit (mit positiver Wahrscheinlichkeit) stattfinden müßten, mithin in dieser Zeit auch ∞-viele Ankünfte stattfänden. Das ist in einem Poissonprozeß aber nicht möglich.

In [5] S. 79 wird gezeigt, daß für den Poisson-Prozeß mit Rate $\lambda(\theta)$ aus einem Starken Gesetz der Großen Zahlen folgt $t^{-1}N(t) \to \lambda(\theta)$ $(t \to \infty)$ fast sicher, daher auch

$$\frac{N(\sum_{m=1}^{n} T_m)}{\sum_{m=1}^{n} T_m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(\theta) \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{ - f.s.})$$

Daraus folgt dann die Behauptung für die angegebene Schätzfunktion.

Der Schätzer aus Satz 11.5 kann noch vereinfacht werden, indem statt "Ankünfte pro Zeit" die "Bedienungen pro Zeit" betrachtet werden; es gilt :

Satz 11.6

Unter $(W_{1\text{-}9})$ gilt für $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i \in I$

$$\frac{n}{\sum_{m=1}^{n} T_m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(\theta) \qquad (P^i_{\theta,\delta}\text{ - f.s.})$$

Dieses Ergebnis wurde auch von Herrn M. Schäl, Bonn, gefunden.

Beweis:

1. Sei $f \in F$ dann folgt mit Satz 10.2 (b) und 6.3 (a) $P^i_{\theta,f}$ - fast sicher:

$$\lim_n \frac{X_n+n}{\sum_{m=1}^{n} T_m} = \lim_n \frac{\sum_{m=0}^{n-1} X_{m+1} - X_m + 1}{\sum_{m=0}^{n-1} T_{m+1}}$$

$$= \lim_n \frac{\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j\in I} q_\theta(j|X_m, f(X_m))(j-X_m+1)}{\sum_{m=0}^{n-1} t_\theta(X_m, f(X_m))}$$

$$= \frac{\sum_{k\in I} \pi_{\theta,f}(k) \sum_{j\in I} q_\theta(j|k,f(k))(j-k+1)}{\sum_{k\in I} \pi_{\theta,f}(k)\, t_\theta(k,f(k))}$$

$$= \frac{\sum_{k\in I} \pi_{\theta,f}(k) \cdot 1}{\sum_{k\in I} \pi_{\theta,f}(k)\, t_\theta(k,f(k))} = \lim_n \frac{\sum_{m=0}^{n-1} 1}{\sum_{m=0}^{n-1} t_\theta(X_m,A_m)} = \lim_n \frac{n}{\sum_{m=0}^{n-1} T_{m+1}}$$

dabei wurde $\sum_{k\in I} \pi_{\theta,f}(k)k \leq \sum_{k\in I} \pi_{\theta,f}(k)y_1(k) < \infty$ ausgenutzt.

Mit Satz 11.5 folgt also für $f \in F$

$$\frac{n}{\sum_{m=1}^{n} T_m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(\theta) \qquad (P^i_{\theta,f} \text{ - f.s.})$$

Mit Satz 8.10 (a) und 10.2 (b) folgt die Behauptung für alle $\delta \in \Delta$.

Die Schätzfunktionen aus Satz 11.5 und 11.6 sind stark konsistent unabhängig vom benutzten Plan, sie erfüllen daher die Anforderungen aus Satz 9.7.

12. Das Schätzproblem im Semi-Markoff'schen Entscheidungsmodell

Wie die Beispiele im vorigen Abschnitt gezeigt haben, hängt die Existenz und die mögliche Wahl einer Schätzfunktion, die die Voraussetzungen von Satz 9.7 erfüllt, stark von der Struktur des gegebenen Modells ab.

Allgemeine Existenzaussagen lassen sich daher auch nur unter zusätzlichen Annahmen machen (s.u.)

Eine Möglichkeit, Information über den Parameter θ zu gewinnen, besteht in einer konkreten Anwendung sicher darin, die Abhängigkeit $\theta \to r_\theta(i,a)$ auszunutzen. Ist diese Funktion bekannt und wird der Gewinn auf jeder Stufe "ausgezahlt", d.h. ist der Wert $r_\theta(X_m,A_m)$ bekannt, so werden relativ leicht Rückschlüsse auf θ möglich sein.

Im folgenden soll diese Möglichkeit, die natürlich sehr stark von der vorliegenden Funktion r_θ abhängt, nicht weiter untersucht werden.

Es wird also der Fall betrachtet, bei dem die Funktion $\theta \to r_\theta(i,a)$ nicht bekannt bzw. nicht beobachtbar ist oder keine Rückschlüsse auf θ zuläßt (z.B. $r(i,a)$ unabhängig von θ).

Stattdessen werden im folgenden Bedingungen angegeben, die es erlauben, genügend Information aus den beobachtbaren Größen X_m, A_m, Z_m zu gewinnen, um eine Schätzfunktion zu erhalten, die unter allen Plänen stark konsistent ist. Dazu müssen vor allem Identifizierbarkeitsforderungen an $Q_\theta(\cdot,\cdot|i,a)$ gestellt werden.

Als besonders geeignet erweist sich dabei das Konzept der Minimumkontrast-Schätzfunktionen, bei denen der "wahre" Wert sich als Minimumsstelle geeigneter "trennender" Funktionen ergibt. Das Aufsuchen dieser Minimumstelle läßt sich in natürlicher Weise als spezielles Dynamisches Optimierungsproblem auffassen, so daß sich die Konsistenzaussage mit Hilfe der Sätze aus Abschnitt 8 gewinnen läßt.

Die hier benutzte Vorgehensweise ist im wesentlichen eine Verallgemeinerung von Theorem 6 in Mandl [21] auf den hier vorliegenden Fall des abzählbaren

Semi-Markoff-Modells. Dabei wird auch wieder die Erweiterung auf das Kriterium $S(\theta)$ (Satz 10.4) benutzt.

Es wird in Abschnitt 12.A nun zunächst das Konzept der Minimumkontrastfunktion und der daraus abgeleiteten Schätzfunktion für das SMEM eingeführt. Als Beispiel dient die Maximumlikelihood-Schätzung. In 12.B werden Bedingungen für die Konsistenz der Schätzung formuliert und der Konsistenzbeweis geführt.

Schließlich werden in 12.C die Bedingungen für die Gültigkeit von Satz 9.7 und für die Konsistenz zusammengefaßt zu einer Gruppe (G) von Bedingungen. Diese Bedingungen werden für die Anwendung der Maximumlikelihood-Methode untersucht und schließlich wird das Warteschlangenbeispiel aus Abschnitt 11 fortgeführt, indem Bedingungen $W_{10\text{-}12}$ angegeben werden, unter denen die Maximumlikelihoodschätzung in dem Warteschlangenmodell stark konsistent ist.

12.A Minimumkontrastschätzfunktionen

Mandl hat in [21] den Begriff der Minimumkontrast-Schätzfunktionen (vgl. [23]) auf endliche Markoff'sche Entscheidungsmodelle mit deterministischen Plänen übertragen; für den Semi-Markoff-Fall bieten sich folgende Definitionen an:

Definition:

1. Sei $h: \Theta \times I \times A \times I \times Z \to \mathbb{R}^1$. h heißt Minimumkontrastfunktion (MKF):

$$: \Leftrightarrow \quad \text{(i)} \ \forall \theta \in \Theta \quad \forall (i,a) \in K \quad \sum_{j \in I} \int_Z Q_\theta(j, dz|i,a)|h_\theta(i,a,j,z)| < \infty$$

$$\text{(ii)} \ \forall \theta, \theta_0 \in \Theta \quad \forall (i,a) \in K$$

$$\sum_{j \in I} \int_Z Q_{\theta_0}(j,dz|i,a)(h_{\theta_0}(i,a,j,z) - h_\theta(i,a,j,z)) \leq 0$$

$$\text{(iii)} \ \text{Für } \theta, \theta_0 \in \Theta \text{ mit } \theta \neq \theta_0 \text{ gilt: } \exists i \in I \quad \forall a \in D(i)$$

$$\sum_{j \in I} \int_Z Q_{\theta_0}(j,dz|i,a)(h_{\theta_0}(i,a,j,z) - h_\theta(i,a,j,z)) < 0$$

2. Sei h eine MKF, dann sei für $n \geq 1$, $\theta \in \Theta$:

$$L_n(\theta, i_0, a_0, i_1, \ldots, a_{n-1}, i_n, z_n) := \sum_{m=0}^{n-1} h_\theta(i_m, a_m, i_{m+1}, z_{m+1})$$

für $(i_0, a_0, \ldots, i_n, z_n) \in I \times (A \times I \times Z)^n$.

3. Sei für $m \geq 0$

$$\hat{\theta}_m: I \times (A \times I \times Z)^m \to \Theta \quad \text{meßbar},$$

$(\hat{\theta}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ heißt Minimumkontrast-Schätzfunktion (MKS)

$$: \Leftrightarrow \hat{\theta}_m(i_0, a_0, i_1, \ldots, i_m, z_m) \ \text{minimiert}$$

$$\theta \to L_m(\theta, i_0, a_0, i_1, \ldots, i_m, z_m) \quad \text{für } m \geq 1$$

$$\text{und } (i_0, a_0, i_1, \ldots, i_m, z_m) \in I \times (A \times I \times Z)^m.$$

Der folgende Satz liefert einfache Bedingungen für die Existenz eines MKS bei gegebener MKF, d.h. Bedingungen, unter denen das Minimum in L_n durch eine meßbare Funktion angenommen wird.

Satz 12.1

Sei (Θ,T) ein kompakter, metrischer Raum und $h: \Theta \times I \times A \times I \times Z \to \mathbb{R}^1$ mit $\forall (i,a,j,z) \in I \times A \times I \times Z \quad \theta \to h_\theta(i,a,j,z)$ stetig.

Dann gilt:
Für $n \geq 1$ existiert $\hat{\theta}_n: I \times (A \times I \times Z)^n \to \Theta$ meßbar, so daß

$$L_n(\hat{\theta}_n(i_0,a_0,\ldots,i_n,z_n),i_0,a_0,\ldots,i_n,z_n) = \inf_{\theta\in\Theta} L_n(\theta,i_0,a_0,\ldots,i_n,z_n)$$
$$\text{für alle } (i_0,a_0,\ldots,i_n,z_n) \in I \times (A \times I \times Z)^n.$$

Beweis:

Folgt aus Pfanzagl [23], 19 Theorem und der dort folgenden Bemerkung.

Das folgende (umfangreiche) Beispiel zeigt, daß die Minimumkontrast-Methode eine Verallgemeinerung der Maximumlikelihood-Methode ist.

Beispiel 12.1 Maximumlikelihood-Schätzung (MLS)

In diesem Beispiel wird die Existenz von Dichten von Q_θ bzgl. eines σ-endlichen Übergangsmaßes vorausgesetzt:

Definition

Seien $(B,\mathcal{B})$ $(C,\mathcal{C})$ Meßräume.

$\mu: B \times \mathcal{C} \to [0,\infty]$ heißt σ-endliches Übergangsmaß von $(B,\mathcal{B})$ nach $(C,\mathcal{C})$

$:\Leftrightarrow$ (i) $\forall b \in B \quad \mu(b,\cdot)$ ist Maß auf $(C,\mathcal{C})$

(ii) $\forall b \in B \quad \exists C_n(b) \in \mathcal{C},\ n \in \mathbb{N}$

$C_n(b) \uparrow C \quad (n \to \infty)$,

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu(b,C_n(b)) < \infty$, und

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall D \in \mathcal{C} \quad b \to \mu(b,D \cap C_n(b))$ meßbar (vgl. Schäl [29]).

Sei jetzt μ ein σ-endliches Übergangsmaß von $(K, K \cap \mathcal{P}(I) \otimes A)$ nach $(I \times Z, \mathcal{P}(I) \otimes Z)$ mit $K = \{(i,a) | i \in I, a \in D(i)\}$.

Eine Dichte von $Q(\cdot,\cdot|i,a)$ bzgl. μ ist eine meßbare Funktion $l_\theta: I \times A \times I \times Z \to \mathbb{R}_+^1$ mit

$$\forall j \in I \quad \forall B \in Z \quad Q_\theta(j,B|i,a) = \int_B l_\theta(i,a,j,z)\mu(i,a,j,dz).$$

Folgende Bedingungen sollen gelten:

(1) $\forall \theta,\theta' \in \Theta \quad \forall (i,a) \in K$

$$\sum_{j \in I} \int_Z Q_{\theta'}(j,dz|i,a) |\log l_\theta(i,a,j,z)| \chi_{\{l_\theta(i,a,j,z)>0\}} < \infty \quad ,$$

(2) $\forall \theta,\theta' \in \Theta \quad \forall (i,a) \in K$

$$\mu(i,a,\{(j,z) | \chi_{\{l_{\theta'}(i,a,j,z)>0\}} \neq \chi_{\{l_\theta(i,a,j,z)>0\}}\}) = 0 \quad ,$$

(3) $\forall \theta,\theta' \in \Theta \quad \theta \neq \theta' \Rightarrow$

$$\exists i \in I \quad \forall a \in D(i) \quad \mu(i,a,\{(j,z) | l_{\theta'}(i,a,j,z) \neq l_\theta(i,a,j,z)\}) > 0 \quad .$$

Satz 12.2

Erfüllen die Dichten $\{l_\theta | \theta \in \Theta\}$ die Voraussetzungen (1) - (3), so ist

$$h_\theta(i,a,j,z) = -\log l_\theta(i,a,j,z) \chi_{\{l_\theta(i,a,j,z)>0\}}$$

eine MKF.

Zum Beweis braucht man das folgende Lemma, dessen Aussage (a) die bekannte Jensen'sche Ungleichung ist:

Lemma 12.3

Sei X eine integrierbare Zufallsvariable mit Werten in einem Intervall $I \subset \mathbb{R}^1$, $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ streng konvex auf I, d.h. f zweimal differenzierbar und $f'' := \frac{d^2 f}{dt^2} < 0$ auf I und es sei $f(X)$ integrierbar.

Dann gilt

(a) $E[f(X)] \leq f(E[X])$ und
(b) $E[f(X)] = f(E[X]) \Leftrightarrow X = \text{const}$ fast sicher .

Beweis: (vgl. Beckenbach/Bellmann [3] für den Fall, daß X nur endlich viele Werte annimmt.)

1. $E[X] =: c \in I$ (vgl. [14], Satz 25.10)

2. Es gilt die folgende Taylor-Entwicklung um c, für alle $t \in I$:

$$f(t) = f(c) + (t - c)f'(c) + \frac{1}{2}(t - c)^2 f''(\xi(t - c) + c)$$

für $\xi \in (0,1)$ geeignet. Nach Voraussetzung existieren die folgenden Integrale

$$E[f(X)] = f(c) + f'(c)E[X - c] + \frac{1}{2} E[(X-c)^2 f''(\xi(X-c) + c)]$$
$$= f(c) + \frac{1}{2} E[(X - c)^2 f''(\xi(X - c) + c)]$$

3. Aus $(t - c)^2 f''(\xi(t - c) + c) \leq 0$ folgt $\frac{1}{2} E[(X - c)^2 f''(\xi(X - c) + c)] \leq 0$

also $E[f(X)] \leq f(c) = f(E[X])$, d.h. es gilt (a).

4. Aus 2. folgt auch

$E[f(X)] = f(c) \Leftrightarrow \frac{1}{2} E[(X - c)^2 f''(\xi(X - c) + c)] = 0$

$\Leftrightarrow (X - c)^2 f''(\xi(X - c) + c) = 0$ fast sicher $\Leftrightarrow (X - c)^2 = 0$ fast sicher

$\Leftrightarrow X = c$ fast sicher, d.h. es gilt (b).

Beweis von 12.2

Es muß gezeigt werden, daß h_θ die Forderungen (i) - (iii) aus der Definition der MKF erfüllt:

1. (i) folgt sofort aus (1).

2 Sei für $\theta, \theta_0 \in \Theta$ und $(i,a) \in K$

$$B_{i,a} := \{(j,z) \in I \times Z | l_\theta(i,a,j,z) > 0 \text{ und } l_{\theta_0}(i,a,j,z) > 0\}$$

Aus (2) folgt, daß

$$\sum_{j \in I} \int_Z Q_{\theta_0}(j,dz|i,a)(h_{\theta_0}(i,a,j,z) - h_\theta(i,a,j,z)) =$$

$$= \sum_{j\in I} \int_Z \mu((i,a),j,dz) l_{\theta_0}(i,a,j,z) \cdot$$

$$\cdot (-\log l_{\theta_0}(i,a,j,z) \chi_{\{l_{\theta_0}(i,a,j,z)>0\}} + \log l_\theta(i,a,j,z) \chi_{\{l_\theta(i,a,j,z)>0\}}$$

$$= \int_{B_{i,a}} \mu((i,a),d(j,z)) l_{\theta_0}(i,a,j,z) \log \frac{l_\theta(i,a,j,z)}{l_{\theta_0}(i,a,j,z)}$$

$$\leq \log \int_{B_{i,a}} \mu((i,a),d(j,z)) l_{\theta_0}(i,a,j,z) \frac{l_\theta(i,a,j,z)}{l_{\theta_0}(i,a,j,z)}$$

$$= \log Q_\theta(B_{i,a}|i,a)$$

$$= 0$$

d.h. (ii) aus der Definition der MKF ist erfüllt. Dabei wurde Lemma 12.3 mit $X := \frac{l_\theta(i,a,j,z)}{l_{\theta_0}(i,a,j,z)}$ für festes (i,a) als Funktion auf $B_{i,a}$ und ferner $f(x) := \log(x)$ auf $(0,\infty)$ verwendet. Die Integrierbarkeit von $f(X)$ folgt aus (1).

3. Aus Lemma 12.3 (b) folgt, daß die Gleichheit in 1. genau dann gilt, falls

$$\frac{l_\theta(i,a,\cdot,\cdot)}{l_{\theta_0}(i,a,\cdot,\cdot)} = c \quad \text{auf } B_{i,a} \; (Q_{\theta_0}(\cdot,\cdot|i,a) \text{ - f.s.}) ,$$

und daher

$$\frac{l_\theta(i,a,\cdot,\cdot)}{l_{\theta_0}(i,a,\cdot,\cdot)} = c \quad \text{auf } B_{i,a} \text{ außerhalb einer } \mu(i,a,\cdot,\cdot)\text{-Nullmenge gilt,}$$

da auf $B_{i,a}$ die $Q_\theta(\cdot,\cdot|i,a)$- und $\mu(i,a,\cdot,\cdot)$-Nullmengen übereinstimmen. Da l_θ und l_{θ_0} Dichten bzgl. $\mu(i,a,\cdot,\cdot)$ sind, kann dies nur für $c = 1$ gelten, also gilt die Gleichheit genau dann, wenn

$$\mu((i,a),\{(j,z)|l_\theta(i,a,j,z) \neq l_{\theta_0}(i,a,j,z)\}) = 0 .$$

Aus Bedingung (3) folgt jetzt, daß (iii) aus der Definition erfüllt ist.

Aus $\max_{\theta\in\Theta} \sum_{m=0}^{n-1} \log l_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1}) \chi_{\{l_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})>0\}} =$

$= -\min_{\theta\in\Theta} L_n(\theta,X_0,A_0,\ldots,X_n,Z_n)$

folgt, daß ein MLS zu $\{l_\theta | \theta \in \Theta\}$ gerade ein MKS zu $\{h_\theta = -\log l_\theta \chi_{\{l_\theta>0\}} | \theta \in \Theta\}$ ist.

□

12.B Die starke Konsistenz der MKS

Im folgenden werden zu einer MKF h Bedingungen so formuliert, daß die "Gewinnfunktion" $h_\theta(i,a,j,z) - h_\lambda(i,a,j,z)$ für festes $\lambda \in \Theta$ die Voraussetzungen für die Existenz θ-optimaler stationärer Pläne erfüllt.

Es wird also ein Semi-Markoff'sches Entscheidungsmodell im Sinne des Abschnittes 1 und eine MKF h betrachtet, für die die folgenden Voraussetzungen gelten:

(K) (1) Θ kompakt, $\forall i \in I$ $D(i)$ kompakt ,

(2) $\forall i \in I$ $(\theta,a) \to Q_\theta(\cdot,\cdot|i,a)$ stetig bzgl. der schwachen Topologie auf $\mathbb{P}(I \times Z)$,

(3) $\forall i,j \in I$ $(\theta,a,z) \to h_\theta(i,a,j,z)$ stetig .

Sei für $\theta,\lambda \in \Theta$, $(i,a) \in K$

$$G_\theta^\lambda(i,a) := \sum_{j\in I} \int_Z Q_\theta(j,dz|i,a)(h_\theta(i,a,j,z) - h_\lambda(i,a,j,z)),$$

ferner sei $\tilde{H} \subset I$ eine endliche Menge und $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{y}_4 : \Theta \times I \to \mathbb{R}_+^1$ und $\tilde{y}_0 : I \to \mathbb{R}_+^1$, so daß gilt :

(4) $\forall(\theta,i,a,j,z) \in \Theta \times I \times A \times I \times Z$

$$|h_\theta(i,a,j,z)| \le \tilde{y}_0(i) + \tilde{y}_0(j) \quad ,$$

(5) $\forall\theta \in \Theta \quad \forall i \in I \quad \tilde{y}_0(i) \le \tilde{y}_1(\theta,i)$,

(6) $\forall\theta,\lambda \in \Theta \quad \forall(i,a) \in K$

$$|G_\theta^\lambda(i,a)| + 1 + \sum_{j\in I\setminus\tilde{H}} q_\theta(j|i,a)\tilde{y}_1(\theta,j) \le \tilde{y}_1(\theta,i) \quad ,$$

(7) $\forall i \in I \quad \theta \to \tilde{y}_1(\theta,i)$ stetig ,

(8) $\forall i \in I \quad (\theta,a) \to \sum_{j\in I} q_\theta(j|i,a)\tilde{y}_1(\theta,j)$ stetig ,

(9) $\forall\theta \in \Theta \quad \forall(i,a) \in K$

$$\tilde{y}_1(\theta,i) + 1 + \sum_{j\in I\setminus\tilde{H}} q_\theta(j|i,a)\tilde{y}_2(\theta,j) \le \tilde{y}_2(\theta,i) \quad ,$$

$$\tilde{y}_1(\theta,i)^2 + \sum_{j\in I\setminus H} q_\theta(j|i,a)\tilde{y}_3(\theta,j) \le \tilde{y}_3(\theta,i) \quad ,$$

$$\tilde{y}_2(\theta,i)^2 + \sum_{j\in I\setminus H} q_\theta(j|i,a)\tilde{y}_4(\theta,j) \le y_4(\theta,i) \quad ,$$

(10) $\forall\theta \in \Theta \quad \forall i \in I \quad a \to \sum_{j\in I} q_\theta(j|i,a)\tilde{y}_2(\theta,j)$ stetig ,

(11) $\forall\theta,\lambda \in \Theta\ (\lambda \neq \theta \Rightarrow \exists j \in \tilde{H} \quad \forall a \in D(j)\ G_\theta^\lambda(j,a) < 0)$,

(12) $\forall\theta \in \Theta \quad \forall f \in F$ die Markoff-Kette $((X_m),P_{\theta,f})$ besitzt keine zwei disjunkten, abgeschlossenen Klassen und alle Zustände $j \in \tilde{H}$ sind positiv rekurrent ,

(13) $\forall\theta \in \Theta \quad \forall f \in F$ die Markoff-Kette $((X_m),P_{\theta,f})$ ist irreduzibel und positiv rekurrent.

Dabei sind die Bedingungen an die $\tilde{y}_k$ so gestellt, daß sie mit $H := \tilde{H}$ die Stelle der y_k aus (L) einnehmen. Die letzten beiden Bedingungen entsprechen (I_1) bzw. (I_2).

Unter den oben angegebenen Bedingungen gilt nun der folgende Satz, der von Mandl in [21] für ein endliches Markoff'sches Entscheidungsmodell bewiesen wurde.

Satz 12.4

Für eine MKF sei (K_{1-10}) und $((K_{11,12})$ oder $(K_{13}))$ erfüllt. Sei $(\hat{\theta}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine MKS zu h, dann gilt für $\theta_0 \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und $i_0 \in I$

$$\hat{\theta}_m(X_0,A_0,\ldots,X_m,Z_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} \theta_0 \qquad (P^{i_0}_{\theta_0,\delta}\text{ - f.s.})$$

Beweis:

Der Beweis wird mit einer Reihe von Hilfsbehauptungen geführt.
Sei $\theta_0 \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ und i_0 fest. Für $\theta,\lambda \in \Theta$ definiert man

$$\tilde{r}_\theta(\lambda,i,a,j,z) := h_\theta(i,a,j,z) - h_\lambda(i,a,j,z),$$

dann ist $\tilde{r}\colon \Theta \times \Theta \times I \times A \times I \times Z \to \mathbb{R}^1$ meßbar in (a,t).
Sei $\hat{r}_\theta(\lambda,i,a) := \sum_{j\in I} \int_Z Q_\theta(j,dz|i,a)\tilde{r}_\theta(\lambda,i,a,j,z) = G_\theta^\lambda(i,a)$.

Zu dieser Gewinnfunktion wird im folgenden der Durchschnittsgewinn

$\overline{\lim_N} \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{r}_\theta(\lambda,X_m,A_m)$ betrachtet, im wesentlichen also $\hat{R}(\theta)$, wobei $t_\theta(i,a)$ durch

1 ersetzt ist. Durch diese formale Gleichsetzung soll aber keine einschränkende Voraussetzung an (T_m) gemacht werden, d.h. es braucht nicht zu gelten $E_{\theta,\delta}[T_{m+1}|X_m,A_m] = 1$.

(12.5)

Sei $\lambda \in \Theta$ fest. Aus (K_{1-10}) folgt, daß $(T),(C_{1-3}),(L_{1-9})$ für $\hat{r}_\theta(\lambda,i,a)$ und für 1 anstelle von $t_\theta(i,a)$ erfüllt sind.

Beweis zu (12.5):

1. (T), $(C_{1,3})$ sind offensichtlich erfüllt.

2. (C_2):

   2.1 Für $j \in I$ sei $d_j: I \times Z \to \mathbb{R}^1$ mit $d_j(k,z) := \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & \neq \end{cases}$; dann ist d_j stetige, beschränkte Funktion bzgl. der Produkttopologie auf $I \times Z$. Aus (K_2) folgt daher für $i,j \in I$

   $$(\theta,a) \to \sum_{k\in I} \int_Z Q_\theta(k,dz|i,a)d_j(k,z) = \int_Z Q_\theta(j,dz|i,a) = q_\theta(j|i,a) \text{ stetig.}$$

   2.2 Seien $i,j \in I$ fest.
   Für $\theta,\lambda \in \Theta$ gilt nach (K_4)

   $$|\tilde{r}_\theta(\lambda,i,a,j,z)| = |(h_\theta(i,a,j,z) - h_\lambda(i,a,j,z)| \leq 2(\tilde{y}_0(i) + \tilde{y}_0(j))$$

   und nach (K_3) (mit der diskreten Topologie auf I)

   $$(\theta,\lambda,a,j,z) \to \tilde{r}_\theta(\lambda,i,a,j,z) \text{ stetig.}$$

   Daher aus $(K_{2,4,5,8})$ mit Lemma 2.2

   $$(\theta,\lambda,a) \to \sum_{j\in I} \int_Z Q_\theta(j,dz|i,a)\tilde{r}_\theta(\lambda,i,a,j,z) = \hat{r}_\theta(\lambda,i,a,) \text{ stetig.}$$

   Für festes $\lambda \in \Theta$ ist damit die entsprechende Behauptung aus (C_2) bewiesen.

3. Mit $H := \tilde{H}$, $y_k = \tilde{y}_k$ $(k = 1,\ldots,4)$ folgenden die Voraussetzungen (L_{1-9}) aus (K_{6-10}).

(12.6)

Für $\theta \in \Theta$ gilt

$$\overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (h_{\theta_0}(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1}) - h_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1}))$$

$$\leq \hat{g}(\theta_0,\theta) \qquad (P^{i_0}_{\theta_0,\delta} - \text{f.s.})$$

$$:= \sup_{f\in F} \sum_{j\in I} \pi_{\theta_0,f}(j)\hat{r}_{\theta_0}(\theta,j,f(j)) \ .$$

Beweis zu (12.6):

1. Aus $(K_{4,5})$ folgt

$$\tilde{r}_{\theta_0}(\theta,i,a,j,z) \leq \tilde{y}_1(\theta_0,i) + \tilde{y}_1(\theta_0,j)$$

d.h. (B_1) aus Abschnitt 10.A ist erfüllt.
Mit (12.5) folgt jetzt aus Satz 10.4

$$\overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{r}_{\theta_0}(\theta,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1}) = \overline{\lim_N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{r}_{\theta_0}(\theta,X_m,A_m) \quad (P^{i_0}_{\theta_0,\delta} - \text{f.s.})$$

Daher folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 8.9 (a), da (I_1) von (K_{13}) bzw. (K_{14}) impliziert wird.

(12.7)

Es gilt $\theta \to \hat{g}(\theta_0,\theta)$ stetig.

Beweis zu (12.7):

Aus (K_{13}) oder (K_{14}) folgt (I_1), mit (12.5) folgt, daß die Voraussetzungen von Lemma 9.2 erfüllt sind. Daher kann wie im Beweis zu Lemma 9.2 gefolgert werden

$$(\theta,f) \to \sum_{j\in I} \pi_{\theta_0,f}(j)\hat{r}_{\theta_0}(\theta,j,f(j)) \quad \text{stetig.}$$

Aus der Kompaktheit von F folgt dann die Behauptung.

(12.8)

Für $\theta \neq \theta_0$ gilt $\hat{g}(\theta_0,\theta) < 0$.

Beweis zu (12.8):

1. Aus der Definition der MKF folgt für $\theta \neq \theta_0$, $(i,a) \in K$

$$G^{\theta}_{\theta_0}(i,a) \leq 0 \quad \text{und} \quad \exists j_0 \in I \quad \forall a \in D(j_0) \quad G^{\theta}_{\theta_0}(j_0,a) < 0.$$

2. Aus (K_{12}) folgt für $f \in F$ und $j \in \tilde{H}$ $\pi_{\theta_0,f}(j) > 0$ und mit (K_{11}) daher für $\theta \neq \theta_0$

$$\sum_{j\in I} \pi_{\theta_0,f}(j)\hat{r}_{\theta_0}(\theta,j,f(j)) < 0.$$

3. Aus (K_{13}) folgt für $f \in F$ und $j \in I$ $\pi_{\theta_0,f}(j) > 0$ und daher wieder für $\theta \neq \theta_0$

$$\sum_{j\in I} \pi_{\theta_0,f}(j)\hat{r}_{\theta_0}(\theta,j,f(j)) < 0 \quad .$$

4. Wegen $(\theta,f) \to \sum_{j\in I} \pi_{\theta_0,f}(j)\hat{r}_{\theta_0}(\theta,j,f(j))$ stetig und F kompakt folgt in beiden Fällen:

$$\hat{g}(\theta,\theta_0) = \max_{f\in F} \sum_{j\in I} \pi_{\theta_0,f}(j)\hat{r}_{\theta_0}(\theta,j,f(j)) < 0 \quad .$$

Sei $U(\theta_0) := \{\theta \in \Theta \mid \|\theta-\theta_0\| < \varepsilon\}$ offene ε-Umgebung um θ_0, für den Beweis von Satz 12.4 ist zu zeigen $\exists B \subset \Omega$ mit $P^{i_0}_{\theta_0,\delta}(B) = 1 \quad \forall \omega \in B \quad \exists n_0(\omega) \quad \forall n \geq n_0(\omega)$

$$\hat{\theta}_n(X_0, A_0,\ldots,X_n,Z_n)(\omega) \in U(\theta_0).$$

Sei $O_\varepsilon := \Theta \setminus U(\theta_0)$, dann ist Θ_ε kompakt und es gilt nach (12.7) und (12.8)

$$\hat{G}(\theta_0) := \max_{\theta\in\Theta_\varepsilon} \hat{g}(\theta_0,\theta) < 0.$$

Aus (12.5) - (12.8) folgt daher

(12.9)

$$\forall\theta \in \Theta_\varepsilon \quad \exists B_1(\theta) \subset \Omega \ , \ P^{i_0}_{\theta,\delta}(B_1(\theta)) = 1 \quad \forall\omega \in B_1(\theta) \quad \exists n_1(\theta,\omega) \quad \forall n \geq n_1$$

$$\frac{1}{n}\,[L_n(\theta_0,X_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\theta,X_0,\ldots,X_n,Z_n)] < \frac{1}{2}\,\hat{G}(\theta_0) < 0.$$

Es gilt

(12.10)

Es gibt eine reelle Folge $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\rho_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, so daß für $\theta,\lambda \in \Theta$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\,|L_n(\theta,X_0,A_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\lambda,X_0,A_0,\ldots,X_n,Z_n)|$$

$$\leq \max_{j\leq k}\,\sup_{a\in D(j)}\,\hat{r}_\theta(\lambda,i,a) + \rho_k \qquad (P^{i_0}_{\theta_0,\delta}\text{ - f.s.}) .$$

Beweis zu (12.10):

1. $$\overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\,|L_n(\theta,X_0,A_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\lambda,X_0,A_0,\ldots,X_n,Z_n)|$$

$$= \overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\,\Big|\sum_{m=0}^{n-1}\tilde{r}_\theta(\lambda,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})\Big|$$

$$\leq \overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|\tilde{r}_\theta(\lambda,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})|\chi_{\{X_m\leq k,\,X_{m+1}\leq k\}}$$

$$+ \overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|\tilde{r}_\theta(\lambda,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})|\chi_{\{X_m>k \text{ oder } X_{m+1}>k\}}$$

2. Aus $(K_{4,5})$ folgt

$$|\tilde{r}_\theta(\lambda\ ,i,a,j,z)|\chi_{\{\ldots\}} \leq \tilde{y}_1(\theta_0,i) + \tilde{y}_1(\theta_0,j)$$

daher mit Satz 10.4 aus 1. $(P^{i_0}_{\theta_0,\delta}$ - f.s.):

$$\overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\,|L_n(\theta,X_0,A_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\lambda,X_0,A_0,\ldots,X_n,Z_n)|$$

$$< \overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}E_{\theta_0,\delta}[\tilde{r}_\theta(\lambda,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})\chi_{\{X_m\leq k,\,X_{m+1}\leq k\}}|X_m,A_m]$$

$$+ \overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}E_{\theta_0,\delta}[\tilde{r}_\theta(\lambda,X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})\chi_{\{X_m>k \text{ oder } X_{m+1}>k\}}|X_m,A_m] .$$

3. Der erste Summand in 2. kann jetzt durch folgenden Ausdruck nach oben abschätzt werden:

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \chi_{\{X_m \le k\}} E_{\theta_0,\delta}[\tilde{r}_\theta(\lambda, X_m, A_m, X_{m+1}, Z_{m+1}) | X_m, A_m] \le \max_{j \le k} \sup_{a \in D(j)} \hat{r}_\theta(\lambda, j, a) .$$

4. Für den zweiten Summanden in 2. ergibt sich aus

$$\chi_{\{X_m > k \text{ oder } X_{m+1} > k\}} \le \chi_{\{X_m > k\}} + \chi_{\{X_{m+1} > k\}}$$

als obere Schranke aus $(K_{4,5})$:

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \{\chi_{\{X_m > k\}} \hat{r}_\theta(\lambda, X_m, A_m) + 2 \cdot \sum_{j>k} q_{\theta_0}(j | X_m, A_m)(\tilde{y}_1(\theta_0, X_m) + \tilde{y}_1(\theta_0, j))\}$$

$$\le \overline{\lim_n} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \chi_{\{X_m > k\}} \tilde{y}_1(\theta_0, X_m) +$$

$$+ \overline{\lim_n} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \{\tilde{y}_1(\theta_0, X_m) q_{\theta_0}(\{j>k\} | X_m, A_m) + \sum_{j>k} q_{\theta_0}(j | X_m, A_m) \tilde{y}_1(\theta_0, j)\} .$$

5. Für den ersten Summanden in 4. folgt aus Lemma 9.2 (a)

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \chi_{\{X_m > k\}} \tilde{y}_1(\theta_0, X_m) \le \varepsilon_k \qquad (P^{i_0}_{\theta_0,\delta} \text{ - f.s.}) \text{ mit } \varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

6. Für den zweiten Summanden aus 4. folgt jetzt wie im Beweis zu Lemma 9.2 (a):

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{y}_1(\theta_0, X_m) q_{\theta_0}(\{j>k\} | X_m, A_m)$$

$$\le \sup_{f \in F} \sum_{i \in I} \pi_{\theta_0, f}(i) \tilde{y}_1(\theta_0, i) q_{\theta_0}(\{j>k\} | i, f(i)) \qquad (P^{i_0}_{\theta_0,\delta} \text{ - f.s.}).$$

Für die "Gewinnfunktion" $\tilde{y}_1(\theta_0, i) q_{\theta_0}(\{j>k\} | i, f(i))$ gilt offensichtlich :

$$f \to \tilde{y}_1(\theta_0, i) q_{\theta_0}(\{j>k\} | i, f(i)) \quad \text{stetig} ,$$

und $\tilde{y}_1(\theta_0, i) q_{\theta_0}(\{j>k\} | i, f(i)) \le \tilde{y}_1(\theta_0, i)$. Wie im Beweis zu Lemma 9.2 folgt mit (L_{5-7}), (12.5) :

$$f \to \sum_{i \in I} \pi_{\theta_0, f}(i) \tilde{y}_1(\theta_0, i) \quad \text{stetig}$$

und daher:

$$f \to \alpha_k(f) := \sum_{i\in I} \pi_{\theta_0,f}(i)\tilde{y}_1(\theta_0,i)q_{\theta_0}(\{j>k\}|i,f(i)) \quad \text{stetig.}$$

Aus $\sum_{i\in I} \pi_{\theta_0,f}(i)\tilde{y}_1(\theta_0,i) \le \sum_{h\in\tilde{H}} \pi_{\theta_0,f}(h)\tilde{y}_2(\theta_0,h) < \infty$ und $q_{\theta_0}(\{j>k\}|i,a) \downarrow 0$ $(k \to \infty)$ folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz $\alpha_k(f) \downarrow 0$ $(k \to \infty)$.

Aus der Kompaktheit von F folgt mit dem Satz von Dini ([2], S. 106)

$$\lim_k \sup_{f\in F} \alpha_k(f) = 0.$$

7. Der letzte Ausdruck in 4. wird wie in 6. ($P^{i_0}_{\theta_0,\delta}$ - f.s.) durch

$$\sup_{f\in F} \sum_{i\in I} \pi_{\theta_0,f}(i) \sum_{j>k} q_{\theta_0}(j|i,f(i))\tilde{y}_1(\theta_0,j)$$

$$= \sup_{f\in F} \sum_{j>k} \pi_{\theta_0,f}(j)\tilde{y}_1(\theta_0,j) =: \beta_k$$

abgeschätzt. Ebenso wie in 6. folgt, daß dieser Ausdruck für $k \to \infty$ gegen 0 geht.

8. $\rho_k := \varepsilon_k + \sup_{f\in F} \alpha_k(f) + \beta_k$ erfüllt die Behauptung.

(12.11)

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists V(\theta) \subset \Theta$, offene Umgebung $\forall \lambda \in V(\theta)$

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{n} |L_n(\theta,X_0,A_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\lambda,X_0,A_0,\ldots,X_n,Z_n)| < \varepsilon \quad (P^{i_0}_{\theta_0,\delta} \text{ - f.s.})$$

Beweis zu (12.11):

Zu $\varepsilon > 0$ sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\rho_k < \frac{\varepsilon}{2}$. Aus $(\theta,\lambda,a) \to \hat{r}_\theta(\lambda,i,a)$ stetig (vgl. (12.5), 2.2) folgt wegen D(i) kompakt für festes $\theta \in \Theta$:

$$\lambda \to \max_{a\in D(i)} \hat{r}_\theta(\lambda,i,a) \quad \text{stetig und } \hat{r}_\theta(\theta,i,a) = 0,$$

daher existiert $V(\theta)$, so daß

$$\forall \lambda \in V(\theta) \quad \max_{j\le k_0} \sup_{a\in D(j)} \hat{r}_\theta(\lambda,j,a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus (12.10) folgt dann die Behauptung.

Aus (12.9) und (12.11) folgt jetzt

(12.12)

$$\forall\theta \in \Theta_\varepsilon \quad \exists V(\theta) \quad \exists B(\theta) \subset \Omega,\ P^{i_0}_{\theta_0,\delta}(B(\theta)) = 1 \quad \forall\omega \in B(\theta) \quad \exists n_0(\theta,\omega) \quad \forall n \geq n_0(\theta,\omega)$$
$$\forall\lambda \in V(\theta)$$

$$\frac{1}{n}\,(L_n(\theta_0,X_0,A_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\lambda,X_0,A_0,\ldots,X_n,Z_n))(\omega) < 0\ .$$

Beweis zu (12.12):

Wird $V(\theta)$ gemäß (12.11) zu $\varepsilon := -\frac{1}{2}\,\hat{G}(\theta_0) > 0$ gewählt, so gibt es $B_2(\theta)$ mit $P^{i_0}_{\theta_0,\delta}(B_2(\theta)) = 1$, so daß $\forall\omega \in B_2(\theta) \quad \exists n_2(\omega) \quad \forall n \geq n_2(\omega) \quad \forall\lambda \in V(\theta)$

$$|L_n(\theta,X_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\lambda,X_0,\ldots,X_n,Z_n)|(\omega) < -\frac{1}{2}\,\hat{G}(\theta_0).$$

Mit $n_0(\theta,\omega) := \max(n_1(\theta,\omega),n_2(\theta,\omega))$ und $B(\theta) := B_1(\theta) \cap B_2(\theta)$ folgt aus (12.9) für $n \geq n_0(\theta,\omega)$, $\omega \in B(\theta)$ und $\lambda \in V(\theta)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}(L_n(\theta_0,X_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\lambda,X_0,\ldots,X_n,Z_n))(\omega)\\
\leq\ &\frac{1}{n}(L_n(\theta_0,X_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\theta,X_0,\ldots,X_n,Z_n))(\omega)\\
&+ \frac{1}{n}\,|L_n(\theta,X_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\lambda,X_0,\ldots,X_n,Z_n)|(\omega)\\
<\ &\frac{1}{2}\,\hat{G}(\theta_0) - \frac{1}{2}\,\hat{G}(\theta_0)\\
=\ &0.
\end{aligned}$$

Beweis zu Satz 12.4:

$\{V(\theta)|\theta \in \Theta\}$ bildet eine offene Überdeckung der kompakten Menge Θ_ε; es gibt daher $\theta_1,\ldots,\theta_m \in \Theta_\varepsilon$ mit $\Theta_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{m} V(\theta_k) \cap \Theta_\varepsilon$. Sei $B := \bigcap_{k=1}^{m} B(\theta_k)$, dann gilt $P^{i_0}_{\theta_0,\delta}(B) = 1$ und mit $\bar{n}_0(\omega) := \max\{n_0(\theta_k,\omega)|k = 1,\ldots,m\}$ folgt jetzt aus (12.12)

$$\forall\omega \in B \quad \exists\bar{n}_0(\omega) \quad \forall n \geq \bar{n}_0(\omega) \quad \forall\lambda \in \Theta_\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}\,(L_n(\theta_0,X_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\lambda,X_0,\ldots,X_n,Z_n))(\omega) < 0 \quad .$$

Andererseits folgt aus der Definition der MKS $(\hat{\theta}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, daß $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \omega \in \Omega$

$$\frac{1}{n}\,(L_n(\theta_0,X_0,\ldots,X_n,Z_n) - L_n(\hat{\theta}_n,X_0,\ldots,X_n,Z_n))(\omega) \geq 0 \quad ,$$

daraus folgt also $\forall \omega \in B \quad \forall n \geq \overline{n}_0(\omega) \quad \hat{\theta}_n(\omega) \notin \Theta_\varepsilon$

bzw. $\forall \omega \in B \quad \forall n \geq \overline{n}_0(\omega) \quad \|\hat{\theta}_n(\omega) - \theta_0\| < \varepsilon.$

Damit ist die Konsistenz von $(\hat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bewiesen. ⌟

12.C Zusammenfassung und Beispiele

Die folgende Aufstellung faßt vereinfachte Bedingungen zusammen, unter denen, bei gegebener MKF, die zugehörige Schätzfunktion unter allen Plänen $\delta \in \Delta$ stark konsistent ist und gleichzeitig die Aussagen aus Abschnitt 9 zur Konstruktion eines optimalen Planes gelten.

In Beispiel 12.2 wird dann gezeigt, daß die Maximumlikelihoodmethode aus Beispiel 12.1 diese Voraussetzungen erfüllt.

Dabei wird eine Gewinnfunktion der Gestalt

$$\tilde{r}\colon \Theta \times I \times A \times I \times Z \to \mathbb{R}^1$$

wie in Abschnitt 10.A zugrundegelegt.
Es sei $H \subset I$ eine endliche Menge und

$$y_k\colon \Theta \times I \to \mathbb{R}^1_+ \quad \text{für } k = 0,\ldots,4.$$

$$G^{\lambda}_{\theta}(i,a) = \sum_{j\in I} \int_Z Q_{\theta}(j,dz|i,a)(h_{\theta}(i,a,j,z) - h_{\lambda}(i,a,j,z)).$$

$$t^2_{\theta}(i,a) = \sum_{j\in I} \int_0^{\infty} t^2\, Q_{\theta}(j,Y,dt|i,a).$$

Es sollen folgende Bedingungen gelten:

(G) (1) $\exists \eta > 0 \quad \forall i,a,\theta \quad t_{\theta}(i,a) \geq \eta > 0$,

(2) $\forall i \in I \quad D(i)$ kompakt, Θ kompakt ,

(3) $\forall i,j \in I \quad (\theta,a,z) \to h_{\theta}(i,a,j,z)$ stetig ,
$(\theta,a,z) \to \tilde{r}_{\theta}(i,a,j,z)$ stetig ,

(4) $\forall i \in I \quad (\theta,a) \to Q_{\theta}(\cdot,\cdot|i,a)$ stetig bzgl. der schwachen Topologie auf $\mathbb{P}(I \times Z)$,

(5) $\forall i \in I \quad \exists c \in \mathbb{R}^1 \quad \forall \theta \in \Theta \quad 1 \leq y_0(\theta,i) \leq c$,

(6) $\forall i,a,j,z \quad \forall \theta \in \Theta \quad \sup_{\lambda\in\Theta} |h_{\lambda}(i,a,j,z)| \leq y_0(\theta,i) + y_0(\theta,j)$,

(7) $\forall i,a,\theta \quad t^2_{\theta}(i,a) \leq y_0(\theta,i)$,

(8) $\forall i,a,j,z,\theta \quad |\tilde{r}_{\theta}(i,a,j,z)| \leq y_0(\theta,i) + y_0(\theta,j)$,

(9) $\exists d \in \mathbb{R}^1_+ \quad \forall i,a,\theta \quad \sum_{j\in I} q_{\theta}(j|i,a) y_0(\theta,j) \leq y_0(\theta,i) + d$,

(10) $\forall i,a,\theta \quad y_0(\theta,i) + 1 + \sum_{j\in I\setminus H} q_\theta(j|i,a)y_1(\theta,j) \le y_1(\theta,i)$,

(11) y_1,y_2,y_3,y_4 erfüllen $(L_{2\text{-}9})$,

(12) Es gilt $H = \{i^*\}$ für $i^* \in I$ und für $\theta \neq \lambda \quad \forall a \in D(i^*) \quad G_\theta^\lambda(i^*,a) < 0$,

oder:

$\forall\theta \in \Theta \quad \forall f \in F \quad ((X_m),P_{\theta,f})$ ist irreduzibel und positiv rekurrent.

Unter (G) gilt: die MKS $(\hat{\theta}_m)$ ist stark konsistent unter allen $\delta \in \Delta$ und der Plan $\hat{\delta}$ aus Satz 9.7 ist optimal bzgl. der Kriterien W und S.

Der Beweis dieser Behauptung besteht in dem Nachweis der Voraussetzungen der entsprechenden Sätze 9.7, 10.2(b), 12.4. Dabei ist die Gültigkeit von (T),$(C_{1,3})$, $(L_{2\text{-}9})$,(I_1) und (I_2) aus $(G_{1,2,11,12})$ offensichtlich. Ebenso die Gütigkeit von $(K_{1\text{-}5,7\text{-}10})$ aus $(G_{2\text{-}4,6,11})$ mit $\check{y}_0(i) := \inf_{\theta\in\Theta} y_0(\theta,i)$ und $\check{y}_k = y_k$ $(k = 1,\ldots,4)$. $\{(K_{11,12})$ oder $(K_{13})\}$ folgt aus (G_{12}). $(B_{1,2})$ aus Satz 10.2 folgen aus $(G_{7,8,10})$.

Für die Gültigkeit von (C_2) gilt:

1. Die Stetigkeit von $q_\theta(j|i,a)$ folgt aus (12,5) Bew. 3.1.
2. Die Stetigkeit von $(\theta,a) \to \hat{r}_\theta(i,a)$ folgt mit $(G_{4,8,10,11})$ aus Lemma 2.2.
3. Aus (G_7) folgt $t_\theta^2(i,a) \le c < \infty$ und daraus mit [31], S. 283 und (G_4)

$(\theta,a) \to t_\theta(i,a)$ stetig .

Für die Gültigkeit von (L_1) gilt:

4. Aus (G_8) folgt

$$|\hat{r}_\theta(i,a)| \le \sum_{j\in I} q_\theta(j|i,a)(y_0(\theta,i) + y_0(\theta,j)) \le 2y_0(\theta,i) + d$$

$$\text{also } |\hat{r}_\theta(i,a)| + t_\theta(i,a) + 1 \le 2y_0(\theta,i) + t_\theta^2(i,a) + 2 + d$$

$$\le 3y_0(\theta,i) + 2 + d \le (5+d)y_0(\theta,i), \text{ d.h. } (5+d)y_1(\theta,\cdot) \text{ erfüllt } (L_1).$$

Die Gültigkeit von (L_{2-9}) bleibt von dem Faktor (5+d) unberührt.

Für die Gültigkeit von (K_6) gilt:

5. Aus (G_6) folgt

$$|h_\theta(i,a,j,z) - h_\lambda(i,a,j,z)| \le 2(y_0(\theta,i) + y_0(\theta,j))$$

und daher wie in 4.

$$|G_\theta^\lambda(i,a)| \le 4y_0(\theta,i),$$

so daß (K_6) aus (G_{10}) folgt. ⌟

Beispiel 12.2 Maximumlikelihood-Schätzung (Fortsetzung von Bsp. 12.1)

Sei $h_\theta(i,a,j,z) = -\log l_\theta(i,a,j,z)\chi_{\{l_\theta(i,a,j,z)>0\}}$ und es seien die Bedingungen (1) und (2) aus Beispiel 12.1 erfüllt.

Gelten zusätzlich die folgenden Voraussetzungen, so sind die Forderungen $(G_{4-6,9-11})$, die die Schätzfunktion betreffen, erfüllt.

(4) $\forall i,j \in I \quad (\theta,a,z) \to l_\theta(i,a,j,z)$ stetig.

(5) Das dominierende Übergangsmaß μ hängt nicht von $a \in D(i)$ ab.

(6) Es seien y_k $(k = 0,\ldots,4)$ gegeben, die $(G_{5,9-11})$ mit $H = \{i^*\}$ erfüllen und

für $\tilde{y}_0(i) := \inf_{\theta\in\Theta} y_0(\theta,i)$ gelte $\forall i,a,j,z,\theta$

$$l_\theta(i,a,j,z) = 0 \text{ oder } \exp(-\tilde{y}_0(i) - \tilde{y}_0(j)) \le l_\theta(i,a,j,z) \le \exp(\tilde{y}_0(i) + \tilde{y}_0(j)).$$

(7) $\forall\theta,\lambda \in \Theta \quad \theta \neq \lambda \Rightarrow \forall a \in D(i^*) \quad \mu(i^*,\{(j,z)|l_\theta(i^*,a,j,z) \neq l_\lambda(i^*,a,j,z)\}) > 0.$

Dabei folgt (G_4) mit dem Lemma von Scheffé aus (4) und (5); $(G_{3,6})$ folgen unmittelbar aus (4), (6). Aus (7) folgt wie im Beweis zu Satz 12.2 für $\theta \neq \lambda$ $\forall a \in D(i^*) \quad G_\theta^\lambda(i^*,a) < 0.$

Beispiel 12.3 Maximumlikelihood-Schätzung in einer Warteschlange

Es wird nun wieder das Warteschlangenmodell aus Abschnitt 11 zugrundegelegt, der Einfachheit halber ohne Hilfbeobachtungen, also mit $|Y| = 1$. Es werden Bedingungen (W_{10-12}) angegeben, die zusammen mit (W_{1-9}) aus Abschnitt 11 garantieren, daß die Maximumlikelihood-Schätzung stark konsistent ist.

Es sei $p(\cdot|\theta,a)$ wieder die Bedienungszeitverteilung und λ^1 das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^1$; nach Satz 11.3 sind die (L)-Bedingungen mit $H = \{0\}$ unter (W_{1-9}) erfüllt.

(W_{10}) Für $\theta \in \Theta$, $a \in A$ existieren Dichten $f(\theta,a,\cdot) = \frac{dp(\cdot|\theta,a)}{d\lambda^1}$ mit $(\theta,a,t) \to f(\theta,a,t)$ stetig.

(W_{11}) $\exists 0 < \eta_1 \leq \eta_2 < \infty \quad \forall\theta \in \Theta \quad \forall a \in A \quad p([\eta_1,\eta_2]|\theta,a) = 1$ und $\inf\{f(\theta,a,t)|\theta \in \Theta, a \in A, t \in [\eta_1,\eta_2]\} > 0$.

(W_{12}) $\forall\theta,\theta' \in \Theta\ \{\theta \neq \theta' \Rightarrow \forall a \in D(0) \quad Q_{\theta'}(\cdot,\cdot|0,a) \neq Q_\theta(\cdot,\cdot|0,a)\}$.

Es wird eine Gewinnfunktion $\tilde{r}_\theta(i,a,j,t)$ mit

$$(\theta,a,t) \to \tilde{r}_\theta(i,a,j,t) \text{ stetig} \quad \text{und}$$
$$|\tilde{r}_\theta(i,a,j,t)| \leq M + M i^N + M j^N$$

(für geeignete Konstanten M und N) anstelle von (W_3) betrachtet.
Der Aktionenraum A soll komapkt sein. Gelten dann (W_{1-12}), so sind für $h_\theta := -\log l_\theta \cdot \chi_{\{l_\theta>0\}}$ die Voraussetzungen (G_{1-12}) erfüllt. Aus der Funktion $\theta \to \sum_{m=0}^{n} \log l_\theta(X_m,A_m,X_{m+1},Z_{m+1})\chi_{\{l_\theta>0\}}$ kann mit der Maximumlikelihood-Methode eine stark konsistente Schätzfunktion $(\hat{\theta}_n)$ gewonnen werden, so daß der gemäß Satz 9.7 konstruierte Plan $\hat{\delta}$ optimal ist bzgl. W und S.

Beweis dazu:

Es wird die Gültigkeit von G und von (1) - (3) aus Beispiel 12.1 gezeigt.

1. Nach (W_{11}) liegt der Träger von $f(\theta,a,\cdot)$ λ_1 - f.s. in $[\eta_1,\eta_2]$, mit $\underline{c} := \min\{f(\theta,a,t)|\theta \in \Theta, a \in A, t \in [\eta_1,\eta_2]\}$ und

$\overline{c} := \max\{f(\theta,a,t) | \theta \in \Theta, a \in A, t \in [\eta_1,\eta_2]\}$ folgt daher $0 < \underline{c} \leq f(\theta,a,t) \leq \overline{c} < \infty$ (λ_1 - f.s.). Für $i \geq 0$, $a \in D(i)$, $\theta \in \Theta$ erhält man daraus

$$t_\theta(i,a) \geq \eta_1 \cdot \underline{c} \cdot (\eta_2 - \eta_1) > 0 \quad ,$$

damit ist $G_{(1)}$ erfüllt.

2. (G_2) folgt aus (W_1).

3. Sei μ das abzählende Maß auf $\mathbb{N}$. Dann hat $Q_\theta(\cdot,\cdot|i,a)$ bzgl. $\mu \otimes \lambda_1$ die folgende Dichte

$$l_\theta(i,a,j,t) := \begin{cases} \exp(-\lambda(\theta,a)t)\, \dfrac{(\lambda(\theta,a)t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!}\, f(\theta,a,t), & \text{für } j \geq i-1 \geq 0 \\ \lambda(\theta,a)\exp(-\lambda(\theta,a)t) \displaystyle\int_0^t \dfrac{(\lambda(\theta,a)s)^j}{j!}\, f(\theta,a,s)\lambda_1(ds), & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{, für } j < i-1 \end{cases}$$

Die Stetigkeit von $(\theta,a,t) \to l_\theta(i,a,j,t)$ folgt nun aus $(W_{4,10})$; dabei muß für $i = 0$ Satz 2.6 benutzt werden.

4. (G_4) folgt aus (G_3) und der Unabhängigkeit des dominierenden Maßes $\mu \otimes \lambda_1$ von $a \in A$ mit dem Lemma von Scheffé.

5. Zur Bestimmung der Beschränkungsfunktionen y_k zeigt man zunächst, daß es d_0,d_1,d_2 gibt mit

$$|h_\theta(i,aj,t)| \leq d_0 + d_1 j + d_2 j^2.$$

Weiter gilt

$$t_\theta(i,a) \leq \underline{\lambda}^{-1} + \eta_2^2 \ , \ t_\theta^2(i,a) \leq 6\underline{\lambda}^{-2} + 3\eta_2^2 \ ,$$

so daß man für geeignete $D_0,D_1 \geq 0$ mit $N = \max\{N_1,N_2\} + 2$ erhält :

$$\begin{aligned} &|h_\theta(i,a,j,t)| + |\tilde{r}_\theta(i,a,j,t)| + t_\theta(i,a) + t_\theta^2(i,a) + 1 \\ &\leq (D_0 + D_1\, i^N) + (D_0 + D_1\, j^N). \end{aligned}$$

Zu $D_0 + D_1\, i^N$ konstruiert man $y_0(\cdot)$ (von $\theta \in \Theta$ unabhängig) wie im Beweis

zu Lemma 11.2, so daß

$$D_0 + D_1\, i^N + \sum_{j=1}^{\infty} q_\theta(j|i,a)y_0(j) \le y_0(i) \quad .$$

Dann gilt insbesondere

$$\sum_{j=0}^{\infty} q\,(j|i,a)y_0(j) \le y_0(i) + y_0(0)$$

damit sind (G_{5-9}) erfüllt.

5. Die Konstruktion von $y_1,\ldots,y_4$ erfolgt wieder wie im Beweis zu Satz 11.3, so daß $(G_{10,11})$ erfüllt werden mit $H = \{0\}$.

7. Aus (W_{12}) folgt für $a \in D(0)$, $\theta \neq \theta'$

$$\exists j \in I \quad \exists B \subset \mathbb{R}^1 \quad \lambda_1(\{t \in B | l_{\theta'}(0,a,j,t) \neq l_\theta(0,a,j,t)\}) > 0$$

d.h. aber

$$\mu \otimes \lambda_1 \quad (\{(j,t)|l_{\theta'}(0,a,j,t) \neq l_\theta(0,a,j,t)\}) > 0;$$

wie im Beweis zu Satz 12.2 folgt daraus für $\theta \neq \theta'$

$$\forall a \in D(0) \quad G_\theta^{\theta'}(0,a) < 0,$$

damit ist (G_{12}) erfüllt.

8. Schließlich müssen noch (1) - (3) aus Beispiel 12.1 erfüllt sein, damit h_θ nach Satz 12.2 überhaupt MKF ist.
Zu (1): Mit 2. aus dem Beweis zu Lemma 11.2 gilt:

$$\sum_{j\in I} \int_0^\infty Q_\theta(j,dt|i,a)\ |h_\theta(i,a,j,t)| \le d_0 + \sum_{j=1}^{\infty} q_\theta(j|i,a)(d_1 j + d_2 j^2) < \infty \ .$$

Zu (2): Aus 3. folgt, daß

$$l_\theta(i,a,j,t) > 0 \quad (\lambda_1 \text{ - f.s.}) \text{ für } i = 0 \text{ oder } i > 0,\ j \ge i-1 \text{ und}$$
$$l_\theta(i,a,j,t) = 0 \quad (\lambda_1 \text{ - f.s.}) \text{ für } j < i-1 \text{ gilt.}$$

Daher für $\theta,\theta' \in \Theta$, $a,a' \in A$

$$\chi_{\{t|\lambda_\theta(i,a,j,t)>0\}} = \chi_{\{t|\lambda_{\theta'}(i,a',j,t)>0\}} \quad (\lambda_1 - \text{f.s.}) .$$

Zu (3): wurde in 7. bewiesen. ⌟

Wendet man die Maximumlikelihood-Schätzung aus dem letzten Beispiel für die Spezialfälle des Warteschlangenmodells aus Abschnitt 11.C an, so ergibt sich, daß einige der dort angegebenen Schätzer im wesentlichen mit den MLS übereinstimmen:

Beispiel 12.4

Es seien (W_{1-11}) aus Beispiel 12.3 erfüllt

(a) Sei wie in 11.C

$$\lambda(\theta,a) = \lambda(a) \text{ und } p(\cdot|\theta,a) = p_\theta(\cdot) .$$

Dann ist (W_{12}) erfüllt, falls

$$\forall \theta \neq \theta' \qquad p_\theta \neq p_{\theta'} \quad ;$$

denn aus Satz 2.6 folgt dann $p_\theta([0,t)) \neq p_{\theta'}([0,t))$ für $t \in B$ mit $\lambda_1(B) > 0$ und daher für $j = 0$

$$Q_\theta(0,\cdot|0,a) \neq Q_{\theta'}(0,\cdot|0,a).$$

Aus Beispiel 12.3 ernält man die Existenz und Konsistenz (für alle $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Theta$, $i \in I$) des MLS. Berechnen der Funktionen L_n (aus Abschnitt 12.A) ergibt, daß der MLS gerade die folgenden Funktionen maximiert (in meßbarer Weise):

$$\theta \to \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{h}_\theta(X_m, X_{m+1}, T_{m+1}) \qquad \text{mit}$$

$$\tilde{h}_\theta(i,j,t) := \begin{cases} \log f(\theta,t) & \text{für } i > 0 \\ \log \int_0^t s^j f(\theta,t)\lambda_1(ds) & \text{für } i = 0. \end{cases}$$

Verzichtet man auf die Information aus T_m für $m \in \mathbb{N}$ mit $X_{m-1} = 0$, so

erhält man den Maximumlikelihood-Schätzer, der im Abschnitt 11.C mit Hilfe der Folge (T_{σ_n}) konstruiert wurde.

(b) Für den komplementären Fall

$$\lambda(\theta,a) = \lambda(\theta) \quad \text{und} \quad p(\cdot|\theta,a) = p(\cdot|a)$$

ist (W_{12}) erfüllt, falls

$$\theta \to \lambda(\theta) \quad \text{injektiv.}$$

Aus Beispiel 12.3 ergibt sich wieder durch Berechnen von L_n, daß der MLS die folgenden Funktionen maximiert:

$$\theta \to \sum_{m=0}^{n-1} h'_\theta(X_m, X_{m+1}, T_{m+1})$$

mit $h'_\theta(i,j,t) := (j - i + 1) \log \lambda(\theta) - \lambda(\theta)t$. Wegen

$$\sum_{m=0}^{n-1} h'_\theta(X_m, X_{m+1}, T_{m+1}) = (X_n - X_0 + n)\log \lambda(\theta) - \lambda(\theta) \sum_{m=0}^{n-1} T_{m+1}$$

wird das Maximum gerade von dem $\theta' \in \Theta$ angenommen, für das gilt

$$\lambda(\theta') = \frac{X_n - X_0 + n}{\sum_{m=0}^{n-1} T_{m+1}} \quad ;$$

dies ist aber im wesentlichen der Schätzer aus Satz 11.5.

Verzeichnis der zitierten Literatur

[1] Ash, R.B. (1972). "Real Analysis and Probability", Academic Press, New York and London.

[2] Berge, C. (1963). "Topological Spaces", Oliver and Boyd, Edingburgh and London.

[3] Beckenbach, E.F., Bellmann, R. (1961). "Inequalities", Springer-Verlag Berlin.

[4] Chung, K.L. (1967). "Markov Chains with Stationary Transition Probabilities", Second Edition, Springer-Verlag, Berlin.

[5] Cinlar, E. (1975). "Introduction to Stochastic Processes", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[6] Federgruen, A., Hordijk, A., Tijms, H.C. (1979)."Recurrence Conditions in Denumberable State Markov Decision Processes". In: "Dynamic Programming and its Applications", Hrsg. M.L. Puterman, Academic Press, New York.

[7] ——— " ——— ——— " ——— ——— " ——— (1979). "Denumberable State Semi-Markov Decision Processes with Unbounded Costs, Average Cost Criterion". Stoch. Proc. Appl. 9, 223-235.

[8] Gallisch, E. (1978). "Optimale monotone und bang-bang Politiken in Warteschlangen-Modellen". Dissertation, Universität Bonn.

[9] Georgin, J.P. (1978). "Estimation et controle des chaines de Markov sur des espaces arbitraires". In: Lecture Notes in Mathematics 636, Springer-Verlag, Berlin.

[10] van Hee, K.M. (1978). "Markov Strategies in Dynamic Programming". Mathematics of Op. Res. 3 (1).

[11] ——— " ——— (1978). "Bayesian Control of Markov Chains". Mathematical Centre Tract 95, Amsterdam.

[12] van Hee, K.M., Wessels, J. (1978). "Markov Decision Processes and Strongly Excessive Functions". Stoch. Proc. Appl. 8, 59-76.

[13] Hinderer, K. (1970). "Foundations of Non-stationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameter". Springer-Verlag, Berlin.

[14] ——— " ——— (1972). "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie". Springer-Verlag, Berlin.

[15] Hordijk, A. (1974). "Dynamic Programming and Markov Potential Theory". Mathematical Centre Tract 51, Amsterdam.

[16] Hordijk, A. (1976). "Regenerative Markov Decision Models." Math. Progr. Stud. 6, 49-72.

[17] Krabs, W. (1977). "Stetige Abänderung der Daten bei nichtlinearer Optimierung und ihre Konsequenzen". In: Op. Res. Verfahren 25, 1. Symp. on Op. Res. Sept. 1-3, 1976, S. 93-113.

[18] Kurano, M. (1972). "Discrete-time Markovian Decision Processes with an Unknown Parameter - Average Return Criterion". J. Op. Res. Soc. Jap. 15, 67-76.

[19] Loève, M. (1963). "Probability Theory". Third Edition, Van Nostrand, Princeton, New Jersey.

[20] Lukacs, E. (1975). "Stochastic Convergence". Second Edition, Academic Press, New York.

[21] Mandl, P. (1974). "Estimation and Control in Markov Chains". Adv. Appl. Prob. 6, 40-60.

[22] Mandl, P. (1979). "On the Adoptive Control of Countable Markov Chains". In: Probability Theory, Banach Center Publications, Vol. 5, PWN - Polish Scientific Publishers, Warsaw.

[23] Pfanzagl, J. (1969). "On the Measurability and Consistency of Minimum Contrast Estimates". Metrika 14, 249-272.

[24] Rieder, U. (1975). "Bayesian Dynamic Programming". Adv. Appl. Prob. 7, 330 - 348.

[25] Riordan, J. (1958). "An Introduction to Combinatorial Analysis". J. Wiley, New York.

[26] Ross, S.M. (1970). "Applied Probability Models with Optimization Applications". Holden-Day, San Francisco.

[27] Schäl, M. (1977). "On Negative Dynamic Programming with Irreducible Markov Chains and the Average Cost Criterion". In: Bonner Mathematische Schriften Nr. 98, Bonn.

[28] —— " —— (1970). "Ein verallgemeinertes stationäres Entscheidungsmodell der Dynamischen Optimierung". In: Op. Res. Verfahren 10, III. Oberwolfach Tagung über Op. Res., S. 149-162.

[29] —— " —— (1979). "On Dynamic Programming and Statistical Decision Theory Ann. Stat. 7, 432-445.

[30] Varaiya, P., Borkar, V. (1979). "Adaptive Control of Markov Chains." In: Lecture Notes in Control and Information Sciences 16, Springer-Verlag, Berlin.

[31] Vogel, W. (1970). "Wahrscheinlichkeitstheorie". Vandenhoeck und Ruprecht Göttingen.

L E B E N S L A U F

Am 24.3.1952 wurde ich als zweites Kind der Eheleute Luise und Georg Kolonko in Halle/Saale geboren. Von 1958 - 1962 besuchte ich die Volksschule in Gelsenkirchen und Essen, danach die Goetheschule (neusprachliches Gymnasium) in Essen, an der ich 1970 mein Abitur ablegte.

Zum Wintersemester 1970/71 begann ich an der Ruhruniversität in Bochum Mathematik mit dem Nebenfach Elektrotechnik zu studieren. Nach dem Vordiplom (1972) setzte ich mein Studium an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn fort. Im Oktober 1976 legte ich dort meine Diplom-Prüfung im Fach Mathematik mit dem Nebenfach Informatik ab.

Von November 1976 bis November 1979 war ich an der Universität Bonn als Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Angewandte Mathematik, Abteilung Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik im Sonderforschungsbereich 72 beschäftigt. Seit Dezember 1979 bin ich als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematische Statistik der Universität Karlsruhe angestellt.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren G. Ewald, K. Spallek und P. Gänssler in Bochum, sowie E. Peschl, W. Krelle, G. Hasenjäger, W. Schwabhäuser, K.H. Böhling, W. Vogel und M. Schäl in Bonn.